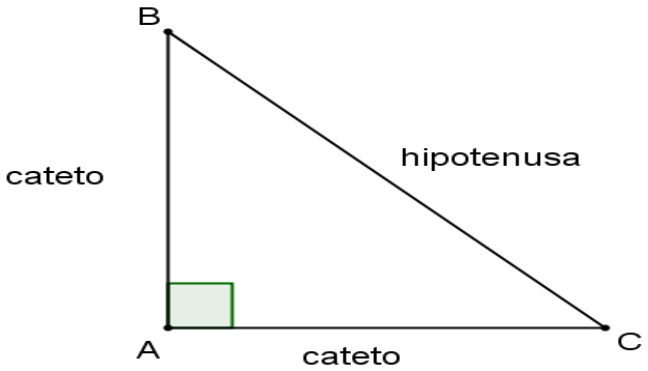
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

1. INTRODUÇÃO

Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um dos seus ângulos internos medindo 90º. Os lados de um triângulo retângulo recebem o nome de hipotenusa e catetos. A hipotenusa é o lado que fica oposto ao ângulo reto; e os catetos são os outros dois lados. Na Figura 1, temos uma ilustração do que acabamos de citar.

Figura 1: Lados de um triângulo retângulo



Os triângulos retângulos possuem diversas aplicações no cotidiano, principalmente em problemas das engenharias e da astronomia, onde é comum calcular alturas e distâncias, conceitos que estão diretamente relacionados a ângulos de 90º e, consequentemente, a esse tipo de triângulo.

2. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras (569 a.c. _ 480 a.c.) foi um matemático e filósofo que nasceu na ilha de Samos na Grécia. Suas ideias em conjunto com as do, também grego,

Tales de Mileto, foram responsáveis por introduzir a matemática como ciência e oportunizar que a mesma se desenvolvesse enormemente nos séculos seguintes aos que viveram. Pitágoras esteve no Egito e na Babilônia, onde absorveu os conhecimentos matemáticos desses lugares. Foi o fundador de uma escola, dedicada ao estudo da Matemática e da Filosofia, que ficou conhecida como escola pitagórica. Foi nessa escola onde o teorema de Pitágoras foi descoberto (WAGNER 2006).

Apesar do teorema de Pitágoras levar esse nome por, supostamente, ter sido descoberto na escola pitagórica, existem provas concretas de que outras civilizações já o utilizavam. É o caso dos babilônios, egípcios e chineses (LIMA et al., 2013, SOUZA, 2013). Além disso, mesmo o teorema levando o nome de Pitágoras, não se pode afirmar que foi o mesmo o seu descobridor, pois sabe-se que na escola pitagórica todas as descobertas eram coletivas e na época havia o costume de atribuir todos os méritos ao mestre (WAGNER, 2006).

O teorema de Pitágoras é um resultado muito importante para a matemática, pois possui diversas aplicações, principalmente na geometria e na trigonometria. De acordo com Lima et al. (2013) esse teorema é um dos mais bonitos e importantes da matemática, pois foi a partir dele que o desenvolvimento da matemática começou.

Ao enunciar tal teorema, alguns autores utilizam uma ideia similar a utilizada por Pitágoras que se refere à área dos quadrados formados sobre os lados de um triângulo retângulo, é o caso de Wagner (2006, p.4) e Lima et al (2013, p.73) que utilizam o seguinte enunciado:

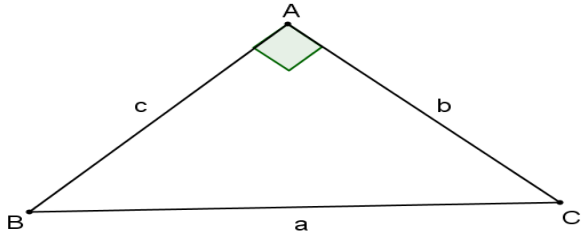
"Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Por outro lado, diversos autores de livros didáticos de Matemática do ensino médio, apresentam o enunciado apenas com a ideia algébrica do teorema, é o caso de Souza (2013, p. 264) e Ribeiro (2007, p. 208), que sugerem o seguinte enunciado:

"Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa".

Teorema de Pitágoras. Dado um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *b* e *c*, como o da Figura 2, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 2: Triângulo retângulo

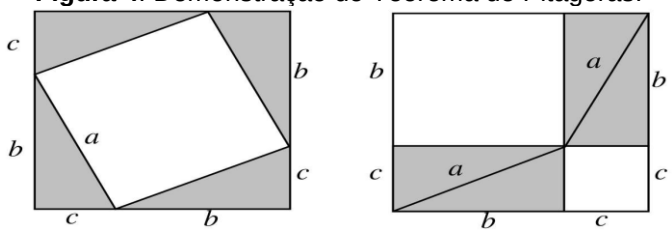


O teorema de Pitágoras possui diversas demonstrações. Em 1940, o matemático americano Elisha Scott Loomis publicou 230 delas no seu livro The Pythagorean Proposition, porém ainda existem mais. Não se sabe ao certo qual foi a demonstração utilizada por Pitágoras, mas imagina-se que o mesmo utilizou alguma demonstração envolvendo áreas (LIMA et al, 2013).

Neste trabalho, apresentaremos duas demonstrações: uma envolvendo áreas e a outra que utiliza semelhança de triângulos e a ideia algébrica do teorema. Antes de apresenta-las, enunciaremos a seguir dois resultados importantes da geometria que serão utilizados na construção das mesmas.

Demonstração 1. Dado um triângulo retângulo, no qual a medida da hipotenusa é *a* e as medidas dos catetos são *b* e *c*, nosso objetivo é mostrar que a área do quadrado de lado medindo *a* é igual a soma das áreas dos quadrados com lados medindo *b* e *c*, para isso observe a Figura 4.

Figura 4: Demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Livro Teorema de Pitágoras e áreas (WAGNER, 2006)

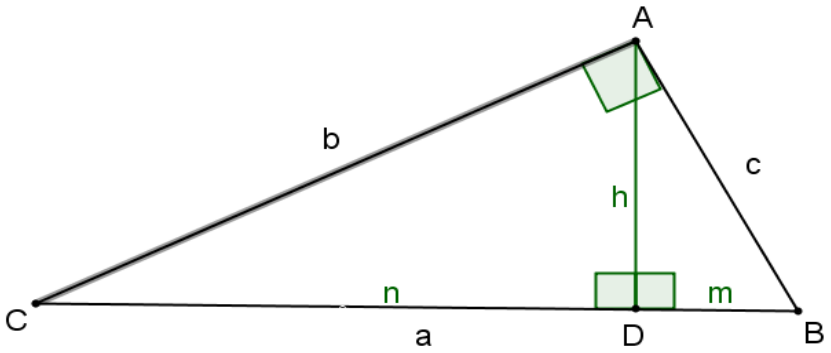
Nessa figura ambos os quadrados possuem lados medindo *b* + *c*. Do quadrado da esquerda retira-se quatro triângulos retângulos com hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *b* e *c*, respectivamente, restando um quadrado de lado *a*. Do quadrado da direita retira-se quatro triângulos congruentes ao do

enunciado, restando assim um quadrado de lado *b* e um quadrado de lado *c*. Desse modo, concluímos que a área do quadrado de lado *a* é igual soma das áreas dos quadrados de lados *b* e *c*. ■

A próxima demonstração é geralmente utilizada para demonstrar o teorema de Pitágoras por autores de livros didáticos do ensino médio, entre eles Ribeiro (2007) e Souza (2013), pois através dela já são determinadas as relações métricas em triângulos retângulos, que não ganharão destaque aqui, por não fazerem parte do objetivo do nosso trabalho.

Demonstração 2. Dado um triângulo retângulo com hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *b* e *c*, queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$. Para isso observe a Figura 5, onde apresentamos o triângulo retângulo *ABC* no qual foi traçada a altura relativa a hipotenusa *AD* = *h*. O segmento *AD* dividiu a hipotenusa em dois segmentos *CD* = *n* e *DB* = *m*, que são as projeções ortogonais dos catetos *b* e *c*, respectivamente, sobre a hipotenusa.

Figura 5: Demonstração 2



Na Figura 5 os triângulos resultantes após a altura AD ser traçada são todos semelhantes, pois seus ângulos internos são congruentes, ou seja,

$$(ABC) \sim (DAC) \sim (DBA).$$

De *(ABC) ~ (DAC),* temos:

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = an. \qquad (1)$$

De *(ABC) ~ (DBA),* temos:

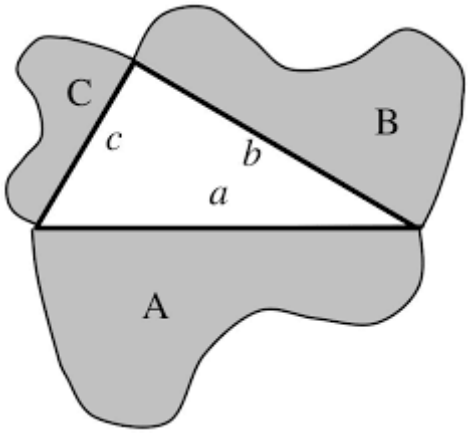
$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = am. \qquad (2)$$

Daí, adicionando as identidades (1) e (2) obtemos:

$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$, ou ainda, $a^2 = b^2 + c^2$. ■

Observação: O teorema desenvolvido na Escola Pitagórica se referia apenas à área de quadrados, porém o mesmo pode ser generalizado para quaisquer figuras semelhantes (não necessariamente polígonos) construídas sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Na figura a seguir, temos que a A = B + C.

Figura 6: Generalização do teorema de Pitágoras



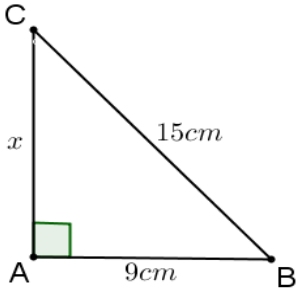
Fonte: Livro Temas e problemas elementares. LIMA, et. al. (2013).

Para introduzir a forma na qual o teorema de Pitágoras é utilizado na prática, apresentaremos dois exemplos de aplicação do mesmo.

Exemplo 1. Em um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, as medidas dos lados *AB* e *BC* são, respectivamente, *9cm* e *15cm*. Qual é a medida do lado *AC*?

Solução: Observe a Figura 7.

Figura 7: Solução do Exemplo 1



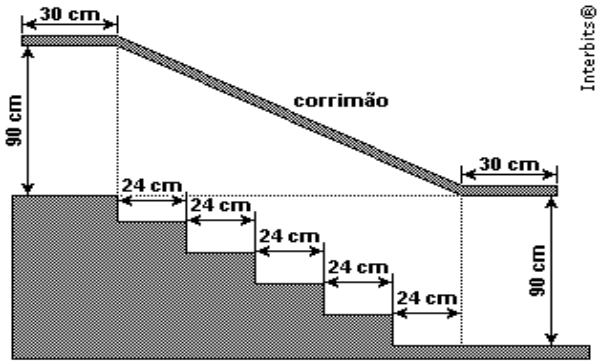
Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$15^2 = x^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = x^2 + 81 \Rightarrow 225 - 81 = x^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm\sqrt{144}$$

$$\Rightarrow x = \pm 12\,.$$

Como *x* deve ser um número positivo, pois se trata de uma medida de comprimento, temos que *x* = 12. Logo, a medida do segmento *AC* é *12cm*.

Exemplo 2: (ENEM 2006)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a) 1,8 m.

b) 1,9 m.

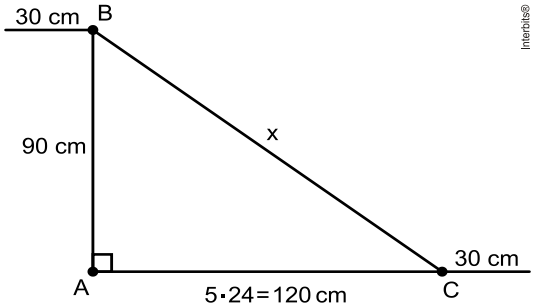
c) 2,0 m.

d) 2,1 m.

e) 2,2 m.

Solução: Observe a Figura 8.

Figura 8: Solução do Exemplo 2.



Fonte: Banco de questões do portal SAS

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos

$$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x^2 = 8100 + 14400 \Rightarrow x^2 = 22500 \Rightarrow x = \pm\sqrt{22500},$$

o que implica em

$$x = \pm 150.$$

Logo *x* = 150 cm e, portanto, o comprimento *C* do corrimão é

$$C = 150 + 30 + 30 \Rightarrow C = 210cm \Rightarrow C = 2{,}1m.$$

Logo a alternativa correta é d).

Com os exemplos 1 e 2 finalizamos a seção 2.2. Na próxima seção iremos apresentar as razões trigonométricas em triângulos retângulos e como as mesmas são utilizadas na prática para resolver problemas.

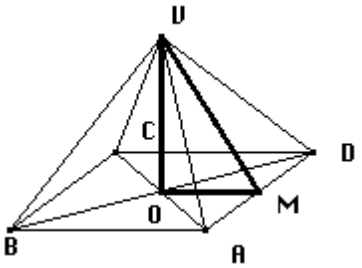
3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

A matemática é notavelmente reconhecida pela sua aplicabilidade em diversas situações do cotidiano e por ter se desenvolvido, em parte, junto as necessidades humanas. De acordo com COSTA (1997) a trigonometria se desenvolveu, desde o mundo antigo, a partir das necessidades práticas da época, principalmente aquelas ligadas à Astronomia, à Agrimensura e à Navegação.

A trigonometria não foi uma obra de uma só nação, pois há evidências de que os egípcios e os babilônios foram responsáveis pelos primeiros indícios de rudimentos da mesma, a partir do uso de razões entre lados de triângulos semelhantes (BOYER, 1974).

Os babilônios que tinham grande interesse pela Astronomia utilizavam esse ramo da matemática tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio (COSTA, 1997). Já no Egito utilizava-se triângulos retângulos para medir a inclinação de pirâmides, a partir do que hoje conhecemos como cotangente de um ângulo.

> [...] No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes,** conhecido como Papiro **Rhind[3]**, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.
>
> Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV**.
>
> **Figura 9:** Pirâmide



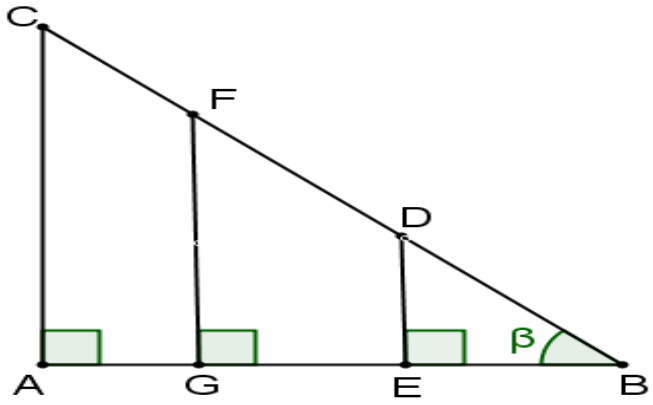
> **Fonte:** Artigo A História da Trigonometria de COSTA (1997).
>
> Exemplo: Seja OV = 40 e OM = 80, então o seqt = 80/40, isto é: seqt = 2 (COSTA, 1997, p. 2).

Rudimentos primitivos da trigonometria também foram encontrados na China, em aproximadamente 1110 a.C., onde triângulos retângulos eram frequentemente utilizados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Os chineses deixaram vestígios de que faziam essas medições com o auxílio das relações trigonométricas e das medições de ângulos, porém não se sabe a técnica utilizada nas medições e nem quais unidades eram utilizadas (COSTA, 1997).

Como podemos observar as razões trigonométricas em triângulos retângulos foram desenvolvidas em civilizações antigas para suprir as necessidades de medições de distâncias, alturas e inclinações e é notório que as mesmas necessidades ocupam um lugar significativo até os dias atuais.

Para enunciar as razões trigonométricas em triângulos retângulos, observaremos inicialmente a Figura 10.

Figura 10: Relações trigonométricas



Nessa figura os triângulos *ABC*, GBF e *EBD* são semelhantes e, portanto, vale as seguintes relações:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = k; \quad (1)$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = k'; \quad (2)$$

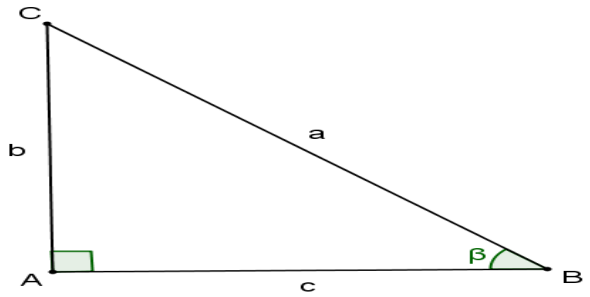
$$\frac{AC}{AB} = \frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = k''. \quad (3)$$

Observamos ainda que qualquer outro triângulo retângulo que possua um ângulo agudo β também será semelhante aos apresentados na Figura 10 e, portanto, a razão entre o cateto oposto ao ângulo β e à hipotenusa será *k*; a razão entre o cateto adjacente ao ângulo β e à hipotenusa será *k';* e a razão entre o cateto oposto ao ângulo β e o cateto adjacente a esse ângulo será *k”*.

Essa ideia de semelhança dá origem as relações trigonométricas em triângulos retângulos (LIMA et. al., 2013).

Dado um triângulo retângulo *ABC* com um ângulo agudo medindo β, como o da Figura 11, identificamos seis razões trigonométricas entre os lados de *ABC*, que são denominadas de razões trigonométricas do ângulo β, pois tais razões dependem exclusivamente deste ângulo e não das medidas dos lados do triângulo.

Figura 11: Relações trigonométricas 2



As principais razões trigonométricas são seno, cosseno e tangente, que são encontradas a partir das expressões (1), (2) e (3) respectivamente, ou seja:

- O seno do ângulo β é a razão entre o cateto oposto a β e à hipotenusa do triângulo. Na Figura 11, temos $sen\ \beta = \frac{b}{a}$;
- O cosseno do ângulo β é a razão entre o cateto adjacente a β e à hipotenusa do triângulo. Na Figura 11, temos $\cos\beta = \frac{c}{a}$;
- A tangente do ângulo β é a razão entre o cateto oposto a β e o cateto adjacente a β. Na Figura 11, temos $tg\ \beta = \frac{b}{c}$.

As outras três razões trigonométricas são denominadas cossecante, secante e cotangente; e são as razões inversas do seno, cosseno e tangente, respectivamente (LIMA et. al. 2013).

3.1 RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Relacionando os dois conceitos principais utilizados neste capitulo, chegaremos a uma importante identidade matemática, conhecida como relação fundamental da trigonometria. Afim de obtermos essa relação utilizaremos

ângulos agudos, pois trabalharemos com triângulos retângulos, porém a mesma é válida para ângulos quaisquer.

Relação fundamental da trigonometria: Dado um ângulo β qualquer, então

$$sen^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

De fato, observando o triângulo da Figura 11, temos que $sen\ \beta = \frac{b}{a}$ e $\cos\beta = \frac{c}{a}$, daí

$$sen^2\beta + \cos^2\beta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Lembrando que pelo Teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$, obtemos

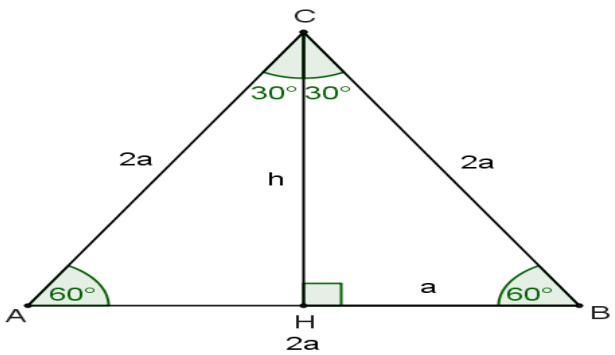
$$sen^2\beta + cos^2\beta = \frac{a^2}{a^2} = 1\,. \qquad \blacksquare$$

2.3.2. SENO, COSSENO E TANGENTE DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

Como observamos anteriormente, as razões trigonométricas dependem exclusivamente do ângulo. Deste modo, cada ângulo possui valores próprios de seno, cosseno e tangente. Apresentaremos a seguir um método semelhante ao utilizado por Ribeiro (2007), Souza (2013) e Fugita et. al. (2015), para encontrar tais valores para os ângulos de 30°, 45° e 60° que são utilizados frequentemente no estudo de trigonometria e são conhecidos por ângulos notáveis.

Encontraremos a princípio as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°. Faremos isso utilizando o triângulo equilátero *ABC* da Figura 12, no qual traçamos a altura relativa ao lado *AB*, que em se tratando de um triângulo equilátero, coincide com a mediana e a bissetriz, dividindo o triângulo *ABC* em dois triângulos retângulos *ACH* e *BCH*.

Figura 12: Triângulo equilátero



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH* da figura 12, temos que:

$(2a)^2 = a^2 + h^2 \Rightarrow 4a^2 - a^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 3a^2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{3a^2} \Rightarrow h = \pm a\sqrt{3}$, pois $a > 0$. Como $h > 0$, então

$$h = a\sqrt{3}.$$

Agora que conhecemos as medidas de todos os lados do triângulo *BCH* em função de *a*, podemos encontrar as razões procuradas. Faremos isso a seguir:

$$sen\ 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{h}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\ 30° = \frac{a}{h} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

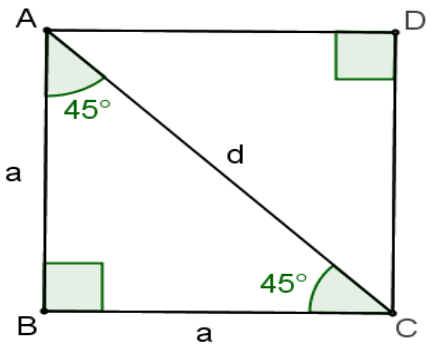
$$sen\ 60° = \frac{h}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Encontradas as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°, resta encontrar as mesmas para o ângulo de 45°. Faremos isso com o auxílio do quadrado *ABCD* da Figura 13, na qual traçamos a diagonal *AC,* que em se tratando de um quadrado, também é a bissetriz, formando dois triângulos retângulos A*BC* e *ADC.*

Figura 13: Quadrado



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC* da Figura 13, temos que:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \pm\sqrt{2a^2} \Rightarrow d = \pm a\sqrt{2}$, pois $a > 0$.

Como $d > 0$, então

$$d = a\sqrt{2}.$$

Agora que conhecemos as medidas de todos os lados do triângulo *ABC* em função de *a*, podemos encontrar as razões procuradas, faremos isso a seguir:

$$sen\ 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg\ 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

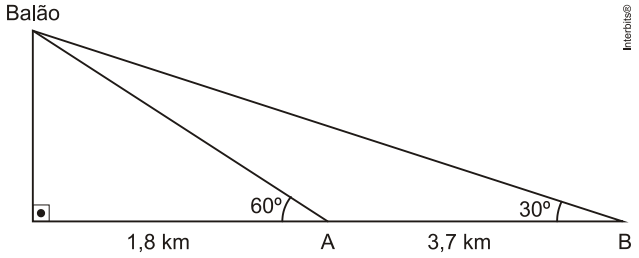
Os dados calculados estão dispostos no Quadro 1.

Quadro 1: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis			
	30°	45°	60°
Sem	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Finalizaremos esta seção ilustrando o modo como as razões trigonométricas em triângulos retângulos são utilizadas na prática, através de dois exemplos extraídos do ENEM.

Exemplo 3: (ENEM 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, Franca, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km

b) 1,9 km

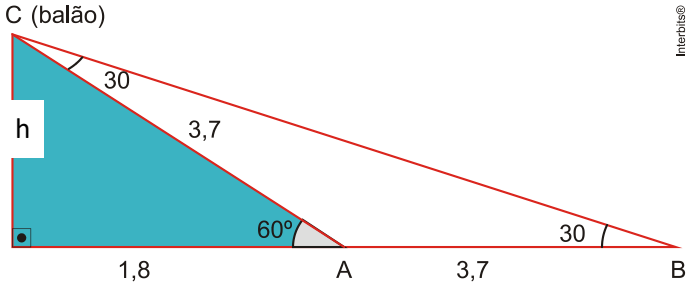
c) 3,1 km

d) 3,7 km

e) 5,5 km

Solução: Observe a Figura 14.

Figura 14: Solução do Exemplo 3



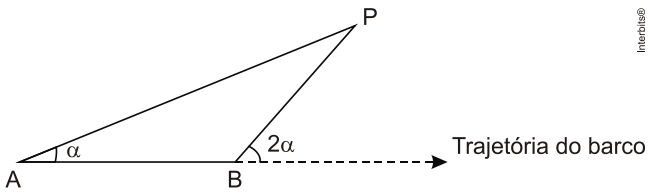
Fonte: Banco de questões do portal SAS

Como as informações disponíveis são as medidas do ângulo e do seu cateto adjacente e o objetivo é determinar a medida do cateto oposto, utilizaremos a razão trigonométrica tangente, em relação ao ângulo de 60º, no triângulo destacado na Figura 14, de onde obtemos

$$tg\ 60° = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow h \cong 1{,}7 \times 1{,}8 \Rightarrow h \cong 3{,}1.$$

Logo a alternativa correta é a c).

Exemplo 4: (ENEM 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^{o}$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\ m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) $1000\ m$.

b) $1000\sqrt{3}\ m$.

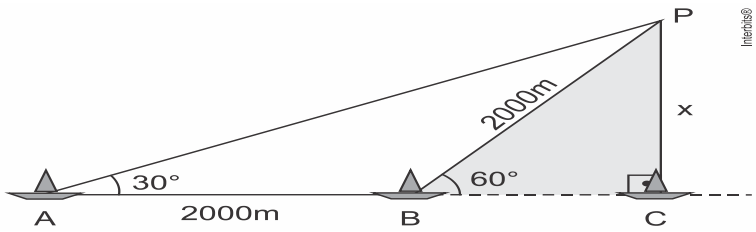
c) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3} m$.

d) $2000\ m$.

e) $2000\sqrt{3}\ m$.

Solução: Observe a Figura 15.

Figura 15: Solução do Exemplo 4



Fonte: Banco de questões do portal SAS

A partir da Figura 15, note que o ângulo $\hat{P}$ do triângulo *BPC* mede 30°, logo o triângulo *ABP* é isósceles. Daí, temos que *BP* = *2000m*. Utilizando a razão trigonométrica seno, em relação ao ângulo de 60º, no triângulo *BCP*, temos:

$$sen\ 60° = \frac{x}{2000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2000} \Rightarrow 2x = 2000\sqrt{3} \Rightarrow x = 1000\sqrt{3}.$$

Desse modo, a alternativa correta é b).

Os exemplos 2, 3 e 4 apresentados, também ilustram a relevância dos temas abordados neste capítulo no Exame Nacional do Ensino Médio o qual é hoje, a principal forma de acesso ao ensino superior no Brasil.