CAPÍTULO

4

Neste capítulo

1. A noção intuitiva de função
2. A definição de função
3. Função e gráfico
4. Função e proporcionalidade

Introdução às funções

Comece pelo que já sabe

Uma operadora de telefonia celular fez uma promoção que oferece três opções de plano de pagamento aos seus clientes.

1. Cite uma característica dos planos mensais A e B que não aparece no plano de recarga C.
2. Qual seria o plano mais econômico para uma utilização de 20 minutos por mês?
3. Determine o custo de 30 minutos de ligações por mês em cada plano oferecido pela operadora. Compare os valores encontrados.
4. Qual seria o plano mais econômico para utilizar 60 minutos de ligações por mês?
5. Pensando nas respostas anteriores, podemos afirmar que o custo de cada plano depende do tempo utilizado? Justifique sua resposta.
6. Que fatores devem ser considerados para a escolha do plano com o melhor custo-benefício? Comente com os colegas.

1. A noção intuitiva de função

A noção de função está presente em muitas situações do cotidiano. Trata-se de um conceito matemático que possibilita analisar como duas grandezas envolvidas em determinado fato ou fenômeno se relacionam.

As situações a seguir apresentam algumas noções relacionadas à ideia de função.

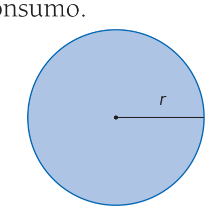
Situação 1. A Companhia Espírito Santense de Saneamento (Cesan) cobra as seguintes tarifas para o fornecimento de água residencial padrão.

Tarifas de água por faixas de consumo	
Faixa de consumo em m³	Tarifa em R$ por m³
Até 15	1,76
De 16 a 30	3,49
Acima de 30	3,89

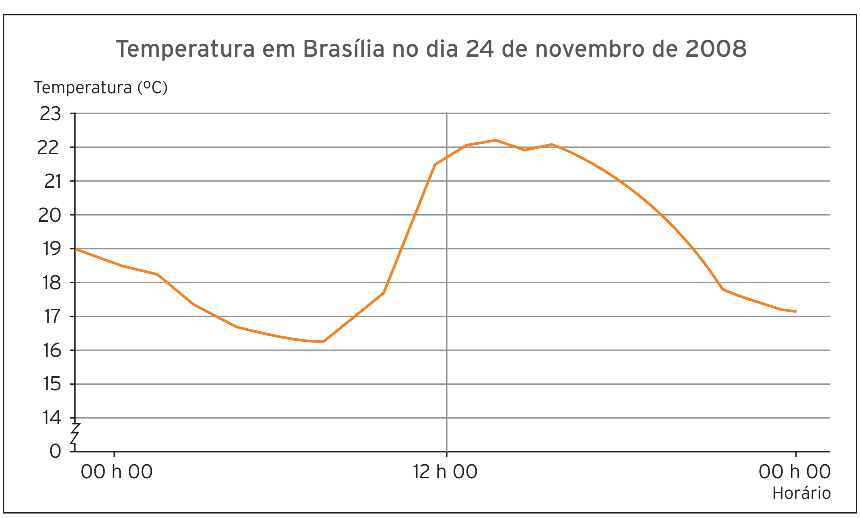
Dados obtidos em: <http://www.cesan.com.br>. Acesso em: 22 nov. 2008.

De acordo com a tabela, a tarifa a ser paga depende da faixa de consumo de água, ou seja, a tarifa está em **função** da faixa de consumo.

Situação 2. O comprimento C de um círculo depende de seu raio r. Diz-se que C é uma função de r. A fórmula matemática que permite calcular o valor de C é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. Essa é a **lei de correspondência** que faz cada valor positivo de r corresponder a um único valor de C.



Situação 3. A temperatura T registrada em °C pelo Instituto Nacional de Meteorologia (Inmet) durante um dia de primavera é uma função do tempo t dado em horas.



Dados obtidos em: <http://meteoweb.inmet.gov.br>. Acesso em: 22 nov. 2008.

Embora não haja uma fórmula matemática simples que relacione as duas grandezas, essa situação descreve uma lei segundo a qual para cada período de tempo t há uma única temperatura T registrada.

Nessa função, a *temperatura* depende do tempo e, por isso, é chamada de **variável dependente**. Já o *tempo*, como não depende de nada, é chamado de **variável independente**.

Tabelas, fórmulas e gráficos são as formas mais comuns utilizadas para representar uma função, como foi mostrado em cada uma das situações aqui apresentadas.

História da Matemática

História das funções

- A palavra *função* parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli considerou uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.
  O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas interiormente. Na tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou à seguinte formulação:
  Uma *variável* é um símbolo que representa qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma *função* (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o *campo de valores* da função.

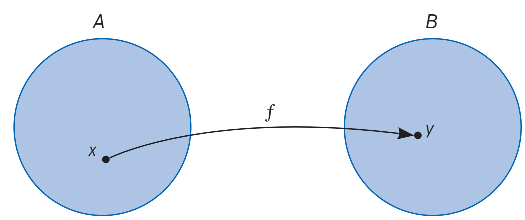
Eves, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas, SP. Ed. Unicamp, 2002.

2. A definição de função

Dada duas variáveis x e y, em que x é a variável independente e y a variável dependente de x, se para cada valor de x é possível associar um único valor de y, então y está em função de x.

Definição

Uma **função** f é uma lei que faz cada elemento x de um conjunto A corresponder a um único elemento y de um conjunto B.



A função f transforma $x \in A$ em $y \in B$.

São válidas as notações a seguir.

- $f: A \rightarrow B$ ou $f: A \xrightarrow{f} B$

  Lê-se: **função f** de A em B, ou **aplicação f** de A em B, ou **transformação f** de A em B.
- $x \mapsto y$

  Lê-se: a **função f** transforma (ou leva) x em y.

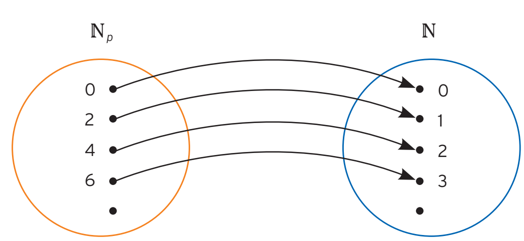
Uma função pode ser entendida de duas maneiras: como uma relação que **leva**, ou como uma relação que **transforma** ou **produz**.

Para refletir

- É possível estabelecer uma relação que leva cada um dos elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ a um único elemento de $\mathbb{N}$? Cite outros conjuntos em que essa relação com o conjunto $\mathbb{N}$ pode ser estabelecida.

Relação que leva

No capítulo 3 definiu-se conjunto enumerável, citando-se como exemplo o conjunto dos números pares $\mathbb{N}_p$, com a apresentação do diagrama abaixo.



De acordo com a definição, é possível estabelecer a seguinte relação que, nesse momento, é denominada **relação f**.

- Todos os elementos de $\mathbb{N}_p$ estão associados a algum elemento de $\mathbb{N}$.
- Cada elemento de $\mathbb{N}_p$ está associado a um único elemento de $\mathbb{N}$.

Essa relação f é uma função que **leva** cada elemento dos números pares a um único elemento do conjunto dos números naturais.

Relação que transforma ou produz

Suponha que exista uma máquina que aceita na entrada números naturais e como saída é produzido o triplo desses números.

O número que sai depende do número que entra. Assim, a máquina representa uma função f que, a partir de x, produz y. Também pode ser dito que representa uma função f que transforma cada número x em um número y tal que $y = 3x$.

Exercício resolvido

1. Na tabela a seguir, o preço do combustível está em função do volume do abastecimento.

Volume (em litros)	Preço (em R$)
5	12,50
10	25,00
15	37,50
20	50,00
25	62,50
30	75,00

a) Escrever a fórmula que associa o preço do combustível (P) e o volume (V).

b) Determinar o valor pago por 7 litros de combustível.

c) Determinar o volume de combustível que corresponde ao preço de R$ 60,00.

Resolução

a) O preço referente a 1 litro de combustível é $\frac{12{,}50}{5} = 2{,}5$. Portanto, a fórmula que relaciona o preço do combustível com o volume é $P = 2{,}5 \cdot V$.

b) Basta substituir V por 7 na fórmula $P = 2{,}5 \cdot V$.
Portanto $P = 2{,}5 \cdot 7 \Rightarrow P = 17{,}5$.
O valor pago por 7 litros de combustível é R$ 17,50.

c) Para determinar o volume de combustível correspondente ao preço de R$ 60,00 é preciso substituir $P = 60$ na fórmula $P = 2{,}5 \cdot V$.

Portanto, $60 = 2{,}5 \cdot V \Rightarrow V = \frac{60}{2{,}5} \Rightarrow V = 24$.

O preço de R$ 60,00 corresponde a 24 litros de combustível.

Exercícios propostos

2. Um avião se desloca em linha reta de acordo com os instantes mostrados na tabela.

***t* (h)**	1	2	3	4	5
***d* (km)**	800	1600	2400	3200	4000

a) Escreva uma fórmula que relacione d e t.

b) Determine a distância que o avião terá percorrido após 8 h de viagem, se mantiver o movimento descrito pela fórmula obtida no item *a*.

3. Um técnico que presta serviços de manutenção de computadores em residências cobra uma taxa fixa de R$ 35,00 pela visita e R$ 10,00 por hora trabalhada.

a) Qual é o valor de um serviço iniciado às 15 h 45 min e concluído às 17 h 45 min?

b) Quantas horas esse técnico trabalhou, sabendo-se que ele recebeu R$ 75,00 pelo serviço?

c) Escreva a lei de correspondência que relaciona o valor pago pelo serviço prestado e as horas de trabalho desse técnico.

d) Qual é a variável dependente da lei obtida no item *c*? E a variável independente?

4. Dados os conjuntos A e B, verifique se cada situação a seguir representa uma função de A em B.

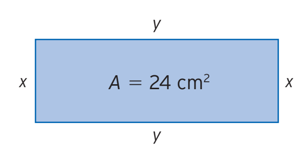
a) Dois elementos de A estão associados a um mesmo elemento de B.

b) Todos os elementos de A estão associados a elementos distintos de B, exceto um, que está associado a dois elementos de B.

c) Um elemento de A não está associado a nenhum elemento de B.

d) Um elemento de A está associado a mais de um elemento de B.

5. Um retângulo tem largura x, comprimento y e área de 24 cm², como mostrado abaixo.



Determine o que se pede em cada item.

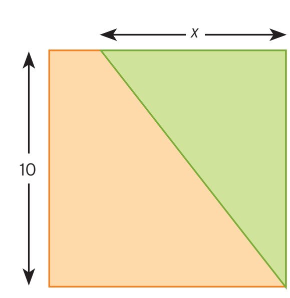
a) A lei de correspondência que expressa o valor do comprimento y em função da largura x.

b) O comprimento y, se a largura desse retângulo for 4,8 cm.

c) As dimensões desse retângulo, se o comprimento for 6 vezes a largura.

6. Em 2008, o salário-família, um benefício concedido pela Previdência Social aos trabalhadores com renda mensal inferior a R$ 472,43, era de R$ 24,23, para famílias com filho de até 14 anos incompletos, ou com filho inválido. Represente por uma fórmula matemática a lei de correspondência que associa a variável salário-família à variável número de filhos por trabalhador.

7. A figura ao lado representa um quadrado de área igual a 100 cm².



a) Expresse a área da região laranja da figura em função de x.

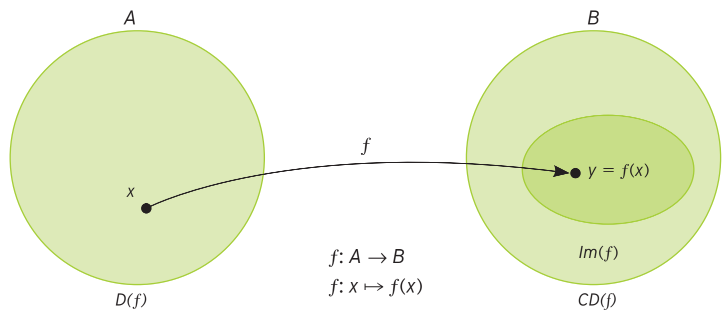
b) Determine a área da região verde da figura, considerando a medida de x igual a 7 cm.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Dada uma função f de A em B, o conjunto A é denominado **domínio** da função f, e o conjunto B, **contradomínio** dessa função.

O domínio é denotado por $D(f)$ ou simplesmente D e o contradomínio, por $CD(f)$ ou CD.

Para cada $x \in D$, o valor correspondente $y \in CD$ assumido pela função f é a **imagem** $f(x)$ da função (lê-se "f de x"). Assim, $y = f(x)$. O conjunto formado por todas as imagens de D é denominado conjunto **imagem** de f. A notação utilizada para o conjunto imagem é $Im(f)$ ou Im.



Embora x e y possam representar quaisquer variáveis, a partir daqui o uso dessas letras ficará restrito aos casos de funções cujas variáveis possam assumir valores numéricos reais, ou seja, funções cujo domínio é dado pelo conjunto dos números reais. Essas são as **funções reais de variáveis reais**.

Considere a função $f(x) = 3x + 5$. Essa função admite domínio $D = \mathbb{R}$, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o número $3x + 5$ é um número real.

Para que uma função seja bem definida, são necessários três ingredientes: o domínio, o contradomínio e a regra, ou seja, a lei de correspondência que permite associar, de maneira bem determinada, cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio.

Funções definidas por fórmulas matemáticas

A maior parte das funções estudadas neste capítulo é determinada por fórmulas matemáticas denominadas **lei de correspondência da função**. Veja a seguir algumas dessas funções.

Exemplo 1. Considere um círculo de raio r.

A área do círculo é uma função do raio e pode ser expressa pela lei de correspondência $A(r) = \pi \cdot r^2$. Nesse caso, a variável independente é o raio r, e a variável dependente é a área A do círculo.

Para um círculo de raio $r = 3$ cm, substituindo o valor de r na lei de correspondência, obtém-se o valor de $A(r)$ correspondente.

$A(r) = \pi \cdot r^2$

$A(3) = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A(3) = 9\pi$

Logo, a área de um círculo de raio igual a 3 cm é 9π cm^2.

Exemplo 2. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei de correspondência $f(x) = x + 3$. A partir da fórmula matemática que descreve a função, pode-se obter alguns valores de $f(x)$ para determinados valores de x.

- A imagem de $x = 0$ é $f(0) = 0 + 3 = 3$, isto é, $f(0) = 3$. Ou, ainda, o valor de f no ponto 0 é 3.
- A imagem de $x = 1$ é $f(1) = 1 + 3 = 4$, isto é, $f(1) = 4$.
- A imagem de $x = 2$ é $f(2) = 2 + 3 = 5$, isto é, $f(2) = 5$.

Observação

Não se deve confundir f com $f(x)$: f é a função e $f(x)$ é o valor que a função assume em cada x pertencente ao domínio.

Calculadora

Potenciação

- As calculadoras científicas apresentam algumas funções que permitem o cálculo de potenciação. As representações, em geral, aparecem como mostrado abaixo.

x^2 ou x^2 : eleva um número ao quadrado.

x^3 ou x^3 : eleva um número ao cubo.

x^y ou x^y : eleva um número x a um expoente y.

x^{-1} ou 1/x : fornece o inverso de um número x.

Observação

Em algumas calculadoras é necessário teclar = para o resultado surgir no visor; em outras, não. Verifique como funciona a sua calculadora.

Estudo do domínio de uma função real

Uma vez que não está dado o domínio, não está caracterizada função alguma. Existe, porém, uma convenção geral que será utilizada daqui em diante: sempre que não for explicitado o domínio D de uma função, fica subentendido que ele está dado pelo conjunto $\mathbb{R}$, devendo ser excluídos apenas os valores para os quais as operações indicadas pela lei de correspondência não fazem sentido.

Exemplos

- A função $f(x) = \frac{1}{x}$ tem domínio $D = \mathbb{R}^*$ ou $D = \mathbb{R} - \{0\}$, pois, para todo x diferente de zero, o número $\frac{1}{x}$ é um número real.
- A função $f(x) = \sqrt{x}$ tem domínio $D = \mathbb{R}^+$, pois, para todo x real não negativo, o número $\sqrt{x}$ é também um número real. São excluídos os valores negativos do domínio dessa função, pois não é possível calcular a raiz quadrada de números negativos no conjunto dos números reais.

Taxa de variação de uma função

Suponha que o custo total de uma empresa para produzir de x unidades de determinado produto seja $C(x)$. Assim, C é a função custo de produção desse produto. Se a quantidade de unidades produzidas crescer de x_1 para x_2, o custo adicional será dado por $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$. A taxa de crescimento, ou **taxa de variação** da função C é dada por $\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$.

De modo geral, dada uma função f, a taxa de crescimento ou taxa de variação da função é dada por $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Para refletir

A tabela abaixo apresenta o nome de cinco pessoas e o respectivo tipo sanguíneo.

Nome	Tipo sanguíneo
Marcos	A
Paula	B
Angélica	AB
Henrique	O
Patrícia	A

a) De acordo com a tabela dada, é possível associar o nome de uma pessoa a dois tipos sanguíneos?
b) E um tipo sanguíneo pode ser associado a dois nomes?
c) Qual das variáveis pode ser expressa em função da outra? Dê o conjunto $D(f)$.
d) Qual é o conjunto $CD(f)$?
e) A lei de correspondência dessa função pode ser expressa por uma fórmula matemática? Por quê?

Exercícios resolvidos

8. Determinar em cada caso a imagem da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de correspondencia é $f(x) = x^2 + 1$.

a) $f(0)$ c) $f(\sqrt{2})$ e) $f(-1)$

b) $f(1)$ d) $f(-4)$ f) $f(-\sqrt{2})$

Resolução

a) $f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

b) $f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

c) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$

d) $f(-4) = (-4)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

e) $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

f) $f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$

9. Determinar o valor do domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de correspondência é dada por $f(x) = x^3 + 4$ e a imagem é 12.

Resolução

Para determinar o valor procurado, basta substituir o valor da imagem na lei.

Assim, $12 = x^3 + 4 \Rightarrow 12 - 4 = x^3 \Rightarrow 8 = x^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, o valor do domínio é 2.

10. Determinar o valor de k na função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de correspondência é $f(x) = x^2 + kx + 4$ e $f(3) = 19$.

Resolução

Como $f(x) = x^2 + kx + 4$ e $f(3) = 19$, para determinar o valor de k é necessário substituir o valor de $f(3)$ na lei de correspondência.

Assim, $19 = (3)^2 + k \cdot 3 + 4 \Rightarrow 19 = 9 + 3k + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 19 - 9 - 4 = 3k \Rightarrow 6 = 3k \Rightarrow k = \frac{6}{3} \Rightarrow k = 2$

Logo, o valor de k é 2.

11. Determinar o valor de m na função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de correspondência é $f(x) = (m + 1)x - 3$ e $f(4) = 6$.

Resolução

Para determinar o valor de m, basta substituir o valor da imagem na lei de correspondência da função.

Assim, $6 = (m + 1) \cdot 6 - 3 \Rightarrow 6 + 3 = 6m + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + 3 - 6 = 6m \Rightarrow 3 = 6m \Rightarrow m = \frac{3}{6} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

Portanto, o valor de m é $\frac{1}{2}$.

Exercícios propostos

12. A tabela a seguir apresenta a nota de cinco alunos em uma prova de geografia.

Nome	Gustavo	Paulo	César	Rodrigo	José
Nota	6	9	7	5,5	6

Considerando uma função f que associa o nome de cada aluno à respectiva nota, faça o que pede cada item.

a) Explicite em seu caderno o domínio e o contradomínio da função f.

b) Qual é a lei de correspondência dessa função?

c) Calcule o valor de x dado abaixo.

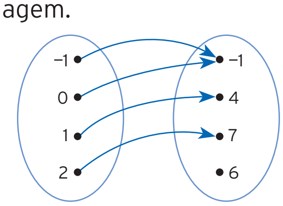
$$x = \frac{f(\text{Gustavo}) + f(\text{Paulo}) + f(\text{César}) + f(\text{Rodrigo}) + f(\text{José})}{5}$$

O que significa o valor de x?

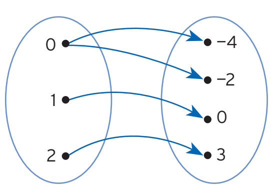
d) Há alguns elementos do domínio que têm a mesma imagem. Escreva em seu caderno quais são esses elementos.

13. Verifique quais diagramas abaixo representam funções, identificando o domínio, o contradomínio e a imagem.

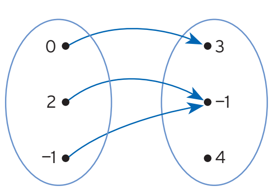
a)



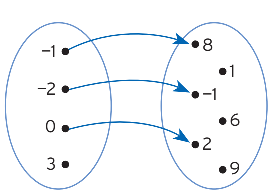
b)



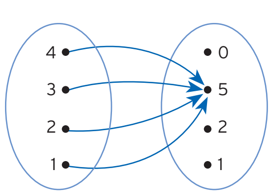
c)



d)



e)



14. Escreva em seu caderno a lei de correspondência da função f pedida em cada item.

a) Lei da função f que relaciona um número real x com seu dobro.

b) Lei da função f que relaciona um número real x com sua metade.

c) Lei da função f que relaciona um número real x com seu quadrado.

d) Lei da função f que relaciona um número real x com seu dobro adicionado de sua metade.

e) Uma função f que associa cada número real a seu inverso.

15. São dadas as funções $g\colon A \to \mathbb{R}$, com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $g(x) = x^3 + 2x^2$. Determine o contradomínio e a imagem de g.

16. Dada a função $g\colon D \to \mathbb{R}$, em que $g(x) = 4x - 5$ e $D = \{-3, -1, 0, 4\}$, escreva em seu caderno o conjunto imagem de g.

17. Dada a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5}$ determine os valores abaixo.

a) $f(0)$

b) $f(-2)$

c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

d) $f(1) - f(-1)$

e) $f(-2) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

18. Na função real definida pela lei $f(x) = x^2 + kx + 5$, tem-se $f(4) = 9$. Determine o valor de k.

19. Quais elementos do domínio da função dada por $f(x) = 8x^2 - 4$ tem como imagem -2?

20. Dada a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$, identifique o conjunto que representa o domínio dessa função.

a) $A = \mathbb{R} - \{4\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$

c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

21. Seja a função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por:

$g(x) = \dfrac{4}{1 - x} + \dfrac{x}{2x - 6}$. Qual é o domínio de g?

22. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$f(x) = \dfrac{x - 9}{3 - x} + \sqrt{2x - 1}$. Identifique em seu caderno quais das afirmações abaixo estão corretas.

a) O número 3 pertence ao domínio de f.

b) O número 1,5 pertence ao domínio de f.

c) O número 1 não pertence ao domínio de f.

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1{,}5 \text{ e } x \neq 3\}$.

23. Dada a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$, determine em seu caderno $f(k+1)$.

24. Sendo $f(x + 1) = x^3 - 2x^2 - 8$, calcule $f(4)$.

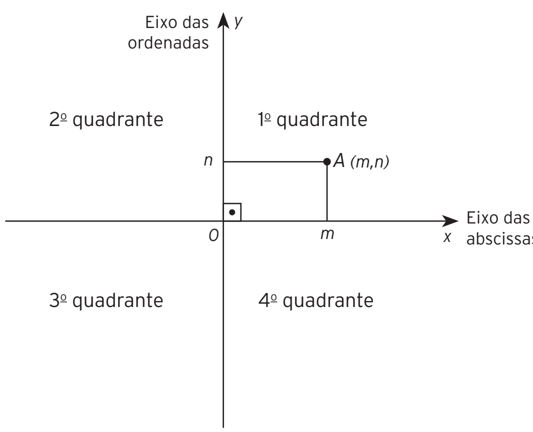
25. Considere a função $g(x) = x^2 + (m - 1)x - 4$. Sabendo que $g(2) = 10$, determine em seu caderno o valor de m.

3. Função e gráfico

Plano cartesiano

O sistema cartesiano é formado por duas retas reais perpendiculares entre si e que se cruzam no ponto zero. Esse ponto é denominado **origem do sistema cartesiano** e é frequentemente denotado por O. Cada reta representa um eixo e são nomeados por Ox e Oy. Sobrepondo um sistema cartesiano e um plano, obtém-se um **plano cartesiano**, cuja primeira vantagem é associar a cada ponto do plano um par de números reais. Assim, um ponto A do plano corresponde a um par ordenado (m, n) com m e n reais.

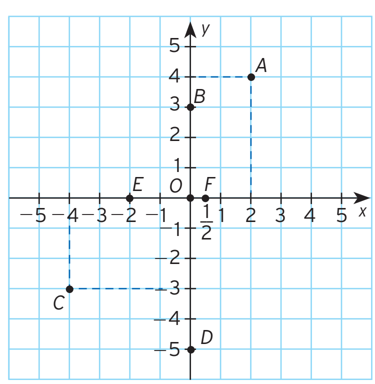
O eixo horizontal Ox é chamado de **eixo das abscissas** e o eixo vertical Oy, de **eixo das ordenadas**. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**.



Para localizar os pontos no plano cartesiano utiliza-se a intersecção de retas paralelas aos eixos Ox e Oy.

Analise os pontos no plano cartesiano abaixo.

- A origem O corresponde ao par ordenado $(0, 0)$.
- O par ordenado $(2, 4)$ corresponde ao ponto A. Observe que a primeira coordenada é obtida no eixo Ox e a segunda coordenada, no eixo Oy.
- O ponto C corresponde ao par ordenado $(-4, -3)$; -4 é chamado de abscissa e -3 de ordenada do ponto C.
- Os pontos E e F estão sobre o eixo das abscissas e, portanto, têm ordenadas iguais a zero: $E(-2, 0)$ e $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



- Os pontos $D(0, -5)$ e $B(0, 3)$ têm abscissas iguais a zero, pois estão localizados sobre o eixo das ordenadas.

O plano cartesiano é o contato imediato entre a geometria e a álgebra. Nele há uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, de modo que todo ponto no plano tem seu correspondente par ordenado, assim como um par ordenado tem um ponto correspondente no plano. Dessa forma, problemas geométricos podem ser interpretados algebricamente e problemas algébricos podem ser interpretados geometricamente.

Para recordar

Par ordenado

- No par ordenado (x, y), x é a primeira coordenada e y é a segunda coordenada, sendo x e y números reais.
- O ponto A é representado por $A(m, n)$; m é denominado abscissa e n é a ordenada do ponto A.
- A ordem em que os elementos de um par ordenado aparecem deve ser considerada. Por exemplo, o par ordenado $(2, 3)$ é diferente do par $(3, 2)$.

Um pouco de história

Plano cartesiano

- O sistema de coordenadas é chamado de **sistema cartesiano** em referência ao matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650). Considerado o pai da filosofia moderna, Descartes desenvolveu em sua obra *La Géométrie* relações entre a álgebra e a geometria, dando origem à geometria analítica.

Representações gráficas de função

Considere a função f: $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \to [0, 4]$. A tabela a seguir mostra algumas representações gráficas possíveis para a função f.

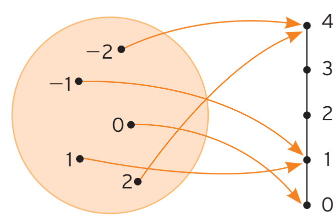
f: $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \to [0,4]$

$x \mapsto x^2$

Tabelas

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Diagramas e/ou esquemas



Plano cartesiano

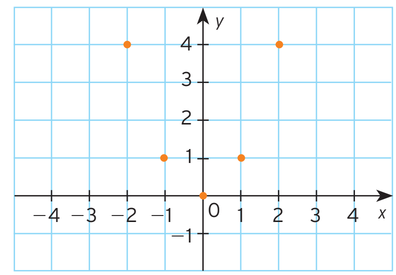


Gráfico de função

Definição

O **gráfico** de uma função é o conjunto de pares ordenados (x, y) que tenham x pertencente ao domínio da função f e $y = f(x)$.

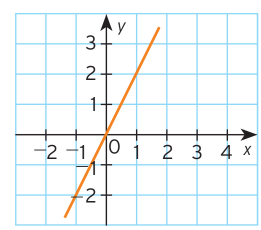
É comum a **representação gráfica** no plano cartesiano ser considerada o **gráfico** da função. O gráfico da função é um conjunto de pontos, ou seja, um conjunto de pares ordenados que, em muitos casos, podem ter mais de uma representação gráfica.

Analise o exemplo a seguir.

Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.

O gráfico da função f é o conjunto de pontos G_f tal que $G_f = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

A representação gráfica no plano cartesiano também é o gráfico da função f.

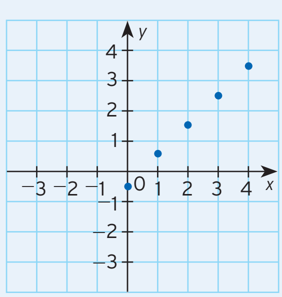


Exercício resolvido

26. Considerando os gráficos das funções f e g, listar as semelhanças e as diferenças entre os dois gráficos.

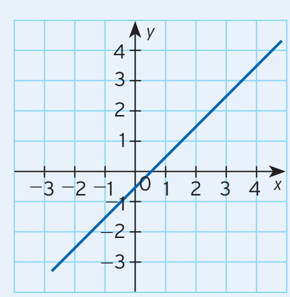
f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x - \frac{1}{2}$



g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x - \frac{1}{2}$



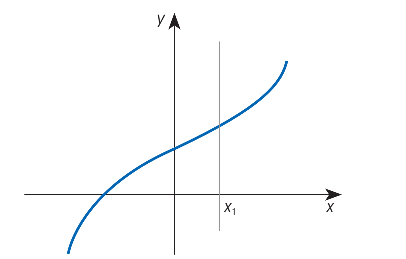
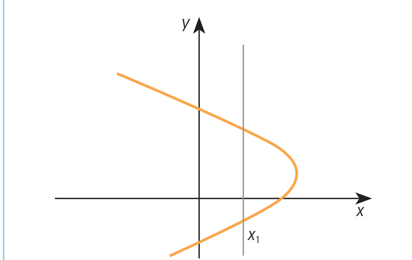
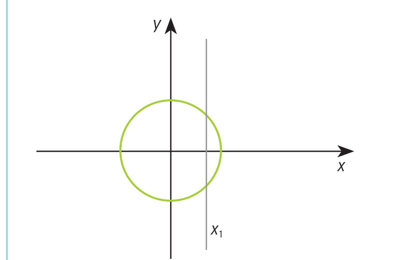
Resolução

Semelhanças: os dois gráficos são formados por conjunto de pontos; representam funções com a mesma lei de correspondência; são conjuntos infinitos de pontos.

Diferenças: a representação gráfica, o domínio e a imagem.

Reconhecimento do gráfico de uma função

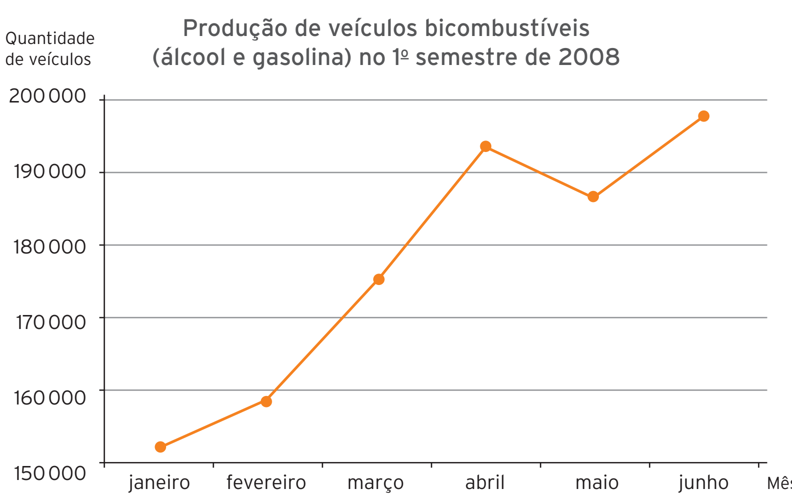
Nem sempre um conjunto de pares ordenados representa o gráfico de uma função. Para saber se de fato representa o gráfico, é preciso verificar se para cada elemento do domínio, que no plano cartesiano é representado pelos valores do eixo *Ox*, existe apenas um único correspondente no contradomínio, representado pelos valores do eixo *Oy*. Geometricamente significa que qualquer reta perpendicular ao eixo *Ox* deve interceptar o gráfico em um único ponto.

É gráfico de função de *x* em *y*	Não é gráfico de função de *x* em *y*	Não é gráfico de função de *x* em *y*
		
Qualquer reta perpendicular ao eixo *Ox* intercepta o gráfico em um único ponto; portanto, o gráfico **representa uma função** de *x* em *y*.	Existem retas perpendiculares a *Ox* que interceptam o gráfico em mais de um ponto; portanto, o gráfico **não representa uma função** de *x* em *y*.	Existem retas perpendiculares a *Ox* que interceptam o gráfico em mais de um ponto; portanto, o gráfico **não representa uma função** de *x* em *y*.

Análise de gráfico

Os gráficos não são um mero recurso visual; eles permitem ao leitor analisar e propor relações entre as variáveis de maneira dinâmica.

Exemplo



Fonte: Anfavea – Associação Nacional de Fabricantes de Veículos Automotores.

Considerando-se esse gráfico, são válidas as informações a seguir.

- O ponto máximo da produção no 1º semestre de 2008 foi no mês de junho.
- O ponto mínimo da produção no 1º semestre de 2008 foi no mês de janeiro.
- De janeiro a abril houve um crescimento na produção, assim como também houve crescimento de maio a junho.
- Houve um decrescimento na produção de abril a maio.
- A taxa de crescimento da produção de janeiro a fevereiro foi menor quando comparada com o período de fevereiro a abril.
- A variável *quantidade de veículos bicombustíveis* está em função da variável *tempo* (em mês).

Para refletir

Folha de S.Paulo, 9 out. 2008.

A personagem da charge é um operador da bolsa de valores internado em um hospital. Ele vê a situação financeira daquele momento, retratada nos gráficos mostrados nos monitores da máquina ligada ao seu corpo.

a) Que situação financeira os gráficos da bolsa representam?
b) E o gráfico do monitor no leito do hospital, o que representa?
c) Por que você acha que o monitor no leito do hospital apresentou esse gráfico?

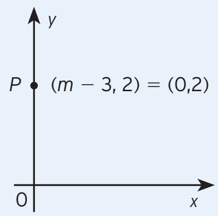
Exercícios resolvidos

27. Determinar o valor de m para que o ponto $P(m - 3, 2)$ pertença ao eixo das ordenadas.

Resolução

O ponto P deve estar sobre o eixo Oy, ou seja, a abscissa desse ponto deve ser igual a zero.

Assim: $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$.



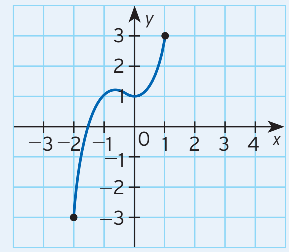
28. Verificar se o par ordenado (2, 1) pertence ao gráfico da função definida com domínio e imagem no conjunto dos números reais, tal que $f(x) = -2x + 3$.

Resolução

O par ordenado (2, 1) tem abscissa 2 e ordenada 1, ou seja, $x = 2$ e $y = 1$. Para que ele pertença ao gráfico da função definida pela lei de correspondência $f(x) = -2x + 3$ é preciso verificar se $f(2) = 1$.

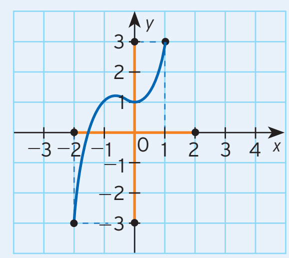
Como $f(2) = -2 \cdot (2) + 3 = -1$, o par ordenado (2, 1) não pertence ao gráfico da função.

29. Determinar o domínio e a imagem da função representada pelo gráfico.



Resolução

O domínio e a imagem da função são obtidos projetando o gráfico respectivamente nos eixos Ox e Oy.

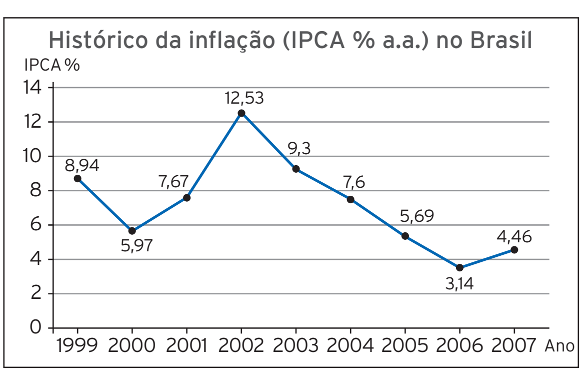


Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$.

Exercícios propostos

30. Construa em papel quadriculado um plano cartesiano e represente os pontos: $M(5, 4)$, $N(3, -4)$, $P(6, 0)$, $Q(-4, 3)$, $R(-3, -6)$, $S(7, -3)$, $T(0, -2)$, $U(2, 1)$, $V(0, 7)$.

31. O gráfico a seguir indica a variação da inflação no Brasil, medida com o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) em função do tempo.



Dados obtidos em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 12 jun. 2008.

a) O gráfico representa uma função? Justifique sua resposta.

b) Indique em que ano houve o maior e menor IPCA registrado, considerando o período representado no gráfico.

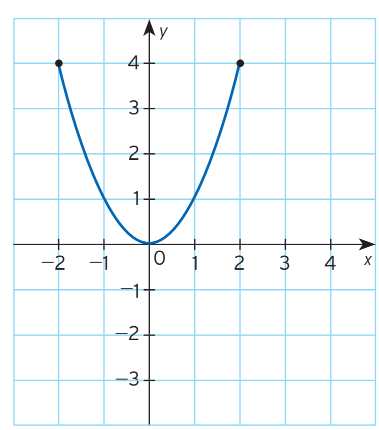
c) Represente em seu caderno alguns pares ordenados que pertencem ao gráfico dessa função.

32. O ponto $P(k - 9, 2k - 8)$ pertence ao eixo das abscissas.

a) Qual é o valor de k?

b) Quais são as coordenadas do ponto P?

33. O gráfico abaixo representa uma função.



a) Determine o domínio e a imagem dessa função.

b) Verifique se os pontos determinados pelos pares ordenados (1, 1), (−1, 2) e (0, 0) pertencem ao gráfico da função.

c) Determine qual é o valor mínimo que essa função assume.

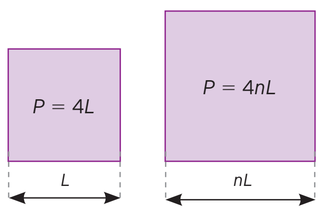
4. Função e proporcionalidade

Até aqui foram apresentadas algumas das diferentes situações que podem ser interpretadas utilizando as noções de função. A proporcionalidade entre grandezas pode ser direta ou indireta.

Proporcionalidade direta

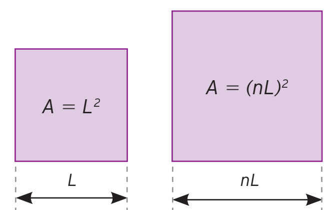
A seguir são apresentadas duas situações.

Relação entre lado e perímetro



Se o lado L aumenta, o perímetro P também aumenta. Além disso, a razão entre o perímetro e o lado é constante, isto é, $\frac{P}{L} = \frac{4L}{L} = \frac{4nL}{nL} = 4$.

Relação entre lado e área



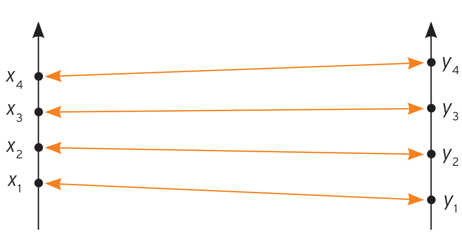
Se o lado L aumenta, a área A também aumenta. Porém, a razão entre as grandezas não é constante: $\frac{L^2}{L} \neq \frac{n^2L^2}{nL}$

Na situação que relaciona o lado e o perímetro do quadrado, uma grandeza depende da outra, e a razão entre elas é constante, isto é, as grandezas estão em uma relação de proporcionalidade direta. Já na situação que relaciona o lado e a área do quadrado, as grandezas estão em uma relação de dependência, porém não de proporcionalidade.

Definição

Duas grandezas, x e y, são **diretamente proporcionais** quando satisfazem duas condições.
- O valor de x aumenta e o correspondente valor de y também aumenta.
- A relação $\frac{y}{x}$ = constante, ou seja, $\frac{y}{x} = k$, com $k > 0$.

O esquema a seguir ilustra uma proporcionalidade direta entre x e y.



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \ldots = k$$

$$y = kx$$

x e y são diretamente proporcionais

Toda situação que apresenta uma relação de proporcionalidade direta pode ser interpretada por meio de uma função f. Para isso é necessário redefinir os objetos conforme a seguir.
- O conjunto dos possíveis valores de uma grandeza será o domínio D.
- O conjunto dos possíveis valores da outra grandeza será a imagem Im.
- A relação de proporcionalidade será a lei de correspondência da função f, ou seja, $f(x) = kx$.

Por exemplo, a relação de proporcionalidade direta entre o lado L e o perímetro P de um quadrado representa uma função P, uma vez que $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $P(L) = 4L$.

Cálculo mental

- Uma torneira despeja em um reservatório 15 litros de água por minuto. Inicialmente o reservatório está vazio. A tabela relaciona o volume de água despejado e o tempo decorrido.

Tempo (min)	Volume (litros)
0	0
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75
6	90
7	105
8	120

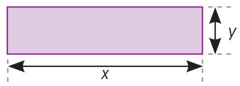
Verifique mentalmente se as grandezas tempo e volume estão em uma relação direta de proporcionalidade.

Proporcionalidade inversa

A seguir são apresentadas duas outras situações que apresentam a relação entre duas grandezas.

Relação entre os lados de um retângulo

A tabela indica alguns valores possíveis para os lados *x* e *y* de retângulos cuja área seja igual a 1 m².



x (m)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	$\sqrt{5}$	3
y (m)	8	4	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3}$

Analisando o retângulo, dois fatos podem ser verificados.

- Se a medida *x* aumenta, a medida *y* diminui.
- O produto $x \cdot y$ é igual a uma constante *k*, por exemplo, $\frac{1}{8} \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot 1 = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Relação entre massa e tempo

A massa de determinado elemento radioativo que se desintegra diminui com o passar do tempo. A tabela abaixo mostra a desintegração desse elemento com massa inicial de 100 g após 48 anos.

Massa (g)	100	50	25	12,5	6,25	3,12	1,56
Tempo (anos)	0	8	16	24	32	40	48

Nessa situação, a grandeza massa *m* diminui enquanto a grandeza tempo *t* aumenta. Porém, o produto entre as grandezas não é igual a uma constante *k*, por exemplo,

$100 \cdot 0 \neq 50 \cdot 8 \neq 25 \cdot 16 \neq 12{,}5 \cdot 24 \neq 6{,}25 \cdot 32 \neq 3{,}12 \cdot 40 \neq 1{,}56 \cdot 48$

isto é, não é possível expressar os valores da tabela por uma relação $m = \frac{k}{t}$

Na situação que relaciona os lados de um retângulo, uma grandeza depende da outra. Além disso, o produto dessas grandezas é constante, isto é, as grandezas x e y estão em uma relação de proporcionalidade inversa. Essa relação de proporcionalidade inversa pode ser expressa por $y = \frac{1}{x}$. Já na situação que relaciona a massa e o tempo, as grandezas estão em uma relação de dependência, porém não de proporcionalidade.

Definição

Duas grandezas, *x* e *y*, são **inversamente proporcionais** quando satisfazem duas condições.

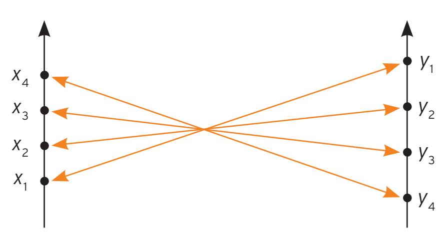
- Os valores de *x* aumentam quando os de *y* diminuem, e vice-versa.
- O produto $x \cdot y$ é constante, ou seja, $x \cdot y = k$, com $k > 0$.

Saiba mais

Constante de proporcionalidade

- A constante *k* de uma proporcionalidade direta ou de uma proporcionalidade indireta é denominada **constante de proporcionalidade.**

O esquema a seguir representa uma proporcionalidade inversa entre x e y.



$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = x_4 \cdot y_4 = k$$

$$\boxed{xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}}$$

x e *y* são inversamente proporcionais

Uma relação de proporcionalidade inversa pode ser interpretada como uma função f, desde que sejam redefinidos os objetos conforme a seguir.

- O conjunto dos possíveis valores de uma grandeza será o domínio D.
- O conjunto dos possíveis valores da outra grandeza será a imagem Im.
- A relação de proporcionalidade será a lei de correspondência da função f, ou seja, $f(x) = \frac{k}{x}$.

Por exemplo, a relação de proporcionalidade inversa entre os lados de retângulos cuja área mede 1 m² representa uma função f, uma vez que $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+;\ f(x) = k \cdot \frac{1}{x}$.

Exercícios resolvidos

34. Determinada máquina produz 100 peças em 40 minutos. Quantas peças essa máquina produzirá se trabalhar por duas horas no mesmo ritmo de produção?

Resolução

Existe uma proporcionalidade direta entre as grandezas *quantidade de peças* e *tempo*. De fato, se o tempo de trabalho da máquina aumenta, a quantidade de peças produzidas também aumenta.

Considere as duas grandezas:

t: tempo de funcionamento da máquina;

n: quantidade de peças produzidas.

De $\frac{n}{t} = \frac{100}{40} = 2{,}5$, é possível escrever a relação $n = 2{,}5t$.

Como 2 horas = 120 minutos, basta substituir $t = 120$ na relação $n = 2{,}5t$.

Assim, $n = 2{,}5t \Rightarrow n = 2{,}5 \cdot 120 = 300$.

Portanto, a máquina produzirá 300 peças em 2 horas de funcionamento.

35. Dois pintores gastam 15 horas para pintar uma parede. Quanto tempo 5 pintores levariam para fazer o mesmo serviço?

Resolução

Se aumenta o número de pintores, o tempo do serviço diminui, portanto as grandezas *tempo* e *número de pintores* são inversamente proporcionais. Adota-se:

t: tempo para pintar a parede;

n: número de pintores.

Se n e t são inversamente proporcionais, então:

$n \cdot t = 2 \cdot 15 = 30$. Assim, $t = \frac{30}{n}$

Para encontrar o tempo que 5 pintores gastariam para fazer o mesmo serviço, basta substituir $n = 5$ em $t = \frac{30}{n} \Rightarrow t = \frac{30}{5} = 6$.

Os 5 pintores levariam 6 horas para pintar a parede.

36. Determinar os valores de x e y para que as sequências $(2, 4, x)$ e $(6, y, 18)$ sejam diretamente proporcionais.

Resolução

Para isso é preciso determinar a constante de proporcionalidade, $k = \frac{6}{2} = 3$, portanto $k = 3$. Então: $\frac{y}{4} = \frac{18}{x} = 3$. Resolvendo as equações: $\frac{y}{4} = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 12$ e $\frac{18}{x} = 3 \Rightarrow x = 6$. Logo, $x = 6$ e $y = 12$.

Exercícios propostos

37. Durante um dia chuvoso foram registrados o aumento do nível da água de um rio e o tempo de chuva em horas.

Aumento do nível de água (cm)	Tempo de chuva (h)
26	2
39	3
52	4
65	5
91	7
117	9

a) Verifique se as grandezas *aumento no nível de água* e *tempo de chuva* estão em uma relação de proporcionalidade direta.

b) Represente por uma fórmula matemática a relação entre os dados da tabela.

c) Determine o aumento no nível do rio após 13 horas de chuvas.

38. Três pessoas constroem um muro em cinco dias. Quantas pessoas são necessárias para construir o mesmo muro em sete dias e meio?

39. Uma fonte fornece 39 litros de água em 5 minutos. Em uma hora e meia, quantos litros de água ela fornecerá?

40. A distância entre duas cidades é de 720 km. O tempo de viagem de um automóvel que vai de uma cidade a outra depende da velocidade média mantida durante o percurso.

Velocidade média (km/h)	Tempo (h)
80	9
60	12
50	14,4
30	24

a) Verifique se *velocidade média* e *tempo* estão em uma relação de proporcionalidade.

b) Represente por uma fórmula matemática a relação entre os dados da tabela.

c) Determine que velocidade média o automóvel deve manter para terminar o percurso em 10 h.

41. Sabe-se que x e y são grandezas diretamente proporcionais e que $y = 15$ quando $x = 3$.

a) Escreva uma fórmula matemática que relacione y com x.

b) Determine o valor de y quando $x = 7$.

c) É possível afirmar que x e y estão em uma relação de proporcionalidade?

Exercícios complementares

A definição de função

42. Descubra a lei de correspondência que relaciona y com x em cada tabela abaixo.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	7	9	11	13	15

b)

x	7	8	9	10	11	12
y	3	2	1	0	-1	-2

c)

x	3	4	5	6	7	8
y	10	17	26	37	50	65

43. Em uma montanha russa de um parque de diversões, um carrinho desce em linha reta na vertical segundo a lei $h(t) = 5 \cdot t^2$, em que h é a altura em metros e t o tempo em segundos. Sabendo que a altura da montanha russa é de 80 metros, determine qual é o tempo de duração da queda desse carrinho.

44. A tabela mostra a distância d em metros percorrida por um automóvel, que parte de uma cidade A em direção a uma cidade B, em cada instante de tempo t, em segundos.

t(s)	0	1	2	3	4	5
d(m)	0	18	36	54	72	90

a) Escreva uma fórmula que relacione d e t.

b) Determine o tempo em horas de viagem do automóvel de A até B, sabendo que a distância entre A e B é 120 km.

45. Uma imobiliária cobra pelos seus serviços uma comissão de 6% sobre o preço de venda do imóvel mais uma taxa fixa de R$ 200,00 de custos administrativos.

a) Qual é o valor que essa imobiliária cobrará de um cliente pela venda de um apartamento de R$ 80 000,00?

b) Escreva uma lei de correspondência que associa o valor cobrado pela imobiliária (y) com o valor de venda do imóvel (x).

46. Uma locadora de automóvel cobra R$ 50,00 para cada dia de uso de seus veículos. O automóvel é entregue ao cliente com R$ 30,00 de combustível no tanque, por conta da locadora.

a) Escreva a lei da função que associa o custo total da locação (y) de um veículo ao número de dias (x) de locação do automóvel.

b) Qual é o custo de uma locação de cinco dias?

c) Por quantos dias um cliente alugou um carro, se o custo foi de R$ 470,00?

47. Um estacionamento cobra R$ 5,00 pela primeira hora e R$ 1,00 para cada hora adicional.

a) Escreva a lei da função que associa o valor cobrado pelo estacionamento ao tempo que cada veículo permanece estacionado.

b) Quanto um cliente pagará ao deixar um veículo cinco horas nesse estacionamento?

48. Verifique se cada conjunto de pontos abaixo representa uma função, justificando em seu caderno a sua resposta.

a) $A = \{(-1, 1); (-2, 3); (-2, 5); (1, 7); (2, 9)\}$

b) $B = \{(0, 1); (1, 1); (2, 2); (3, 4)\}$

49. A sequência dos números pares positivos pode ser expressa pela função $p(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, em que n é a posição do número na sequência. Assim o 3º número par positivo é dado por $p(3) = 6$. Escreva uma função que represente a sequência dos números naturais em cada item.

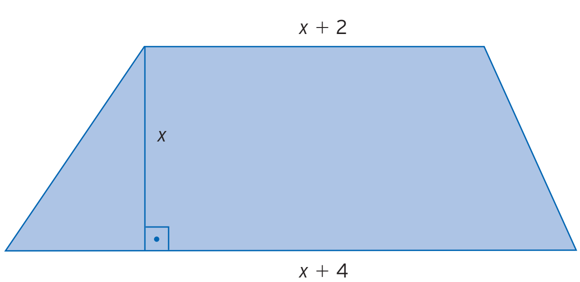
a) Ímpares.

b) Múltiplos de 5.

c) Quadrados perfeitos.

d) Múltiplos de 10 entre 100 e 500.

50. Escreva uma fórmula que represente a área deste trapézio em função de x.



51. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \neq 0$. Determine os valores a seguir.

a) O valor de $f(\sqrt{2})$.

b) O valor de x para que $f(x) = 8$.

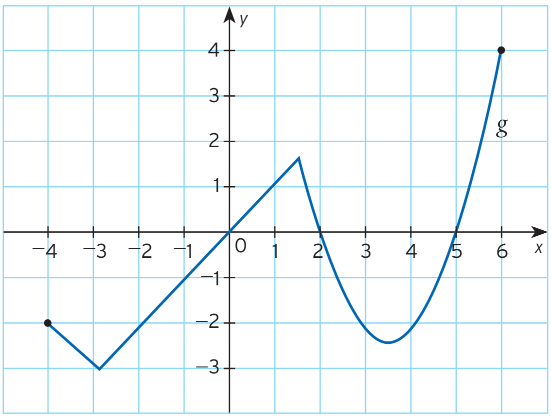
c) O valor de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

52. A função real $A(c) = 6c$, cujo domínio é $D(A) = \{c \in \mathbb{N} \mid 0 < c \leq 6\}$, expressa uma família de retângulos de área A e comprimento c. Construa uma tabela relacionando o comprimento c com a área A que contenha todos os retângulos dessa família.

Função e gráfico

53. Observe o gráfico da função e responda às questões.



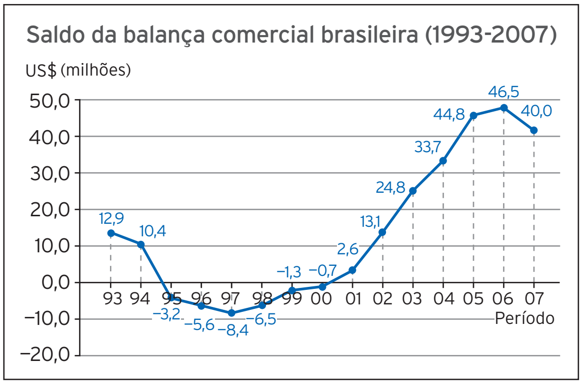
a) Qual é o domínio de g?
b) Qual é a imagem de g?

Função e proporcionalidade

54. Durante um experimento, um pesquisador concluiu que determinada colônia de bactérias cresce segundo a função $n(t) = 2^{t+4}$, em que n representa o número de bactérias e t o tempo em horas.

a) Qual o número inicial de bactérias nessa colônia? (Considere $t = 0$.)
b) Qual o número de bactérias após 2 horas? E após 6 horas?
c) As grandezas *número de bactérias* e *tempo* estão em uma relação de proporcionalidade? Justifique sua resposta.

55. O saldo da balança comercial de um país é a diferença entre o valor das exportações e o valor das importações. Observe o gráfico a seguir e responda às questões em seu caderno.



Disponível em: <http//:www.portalbrasil.net>. Acesso em: 12 jun. 2008.

a) A relação entre o saldo da balança e o ano é de proporcionalidade? Justifique.
b) O gráfico representa uma função? Explique.

56. Observe a tabela de preços de uma loja de vendas no atacado.

Quantidade de peças	Preço por unidade (R$)
Até 50	2,00
Acima de 50	1,80
Acima de 100	1,40
Acima de 1000	0,80

a) As grandezas *quantidade de peças* e *preço por unidade* estão em uma relação de proporcionalidade?
b) Escreva em seu caderno a lei de correspondência que relaciona as grandezas *quantidade de peças* e *preço*, em reais, por unidade.

Desafios de lógica

57. Em uma competição de ciclismo, Israel dá uma volta completa na pista em 32 segundos e Eduardo, em 30 segundos. Quantas voltas Israel estará completando quando Eduardo completar a volta de número 80?

58. Um estacionamento para carros cobra 1 real pela primeira hora e 75 centavos a cada hora ou fração de hora seguinte. Ivone estacionou seu carro às 13 horas e 10 minutos e saiu às 17 horas e 30 minutos. Quanto ela pagou pelo estacionamento de seu carro?

59. Segundo a receita da vovó Ana, para fazer 12 bolinhos são necessários, exatamente, 400 gramas de farinha, 100 gramas de açúcar, 50 gramas de manteiga e meio litro de leite. Seguindo essas proporções da receita, com 500 gramas de açúcar, 300 gramas de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha é possível fazer, no máximo, quantos bolinhos?

60. Todos os habitantes do planeta *XY* possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em um conjunto de 97 pernas e rodas, analise as seguintes afirmações.

a) é possível que existam dezenove carros nesse conjunto.
b) existem no máximo dezesseis carros nesse conjunto.
c) esse conjunto pode ser composto de quatorze carros e nove habitantes.
d) esse conjunto possui no máximo dezessete carros.
e) nesse conjunto existem menos habitantes do que carros.

Integre o aprendizado

61. O número de diagonais *d* de um polígono convexo é dado em função do número *n* de lados por:

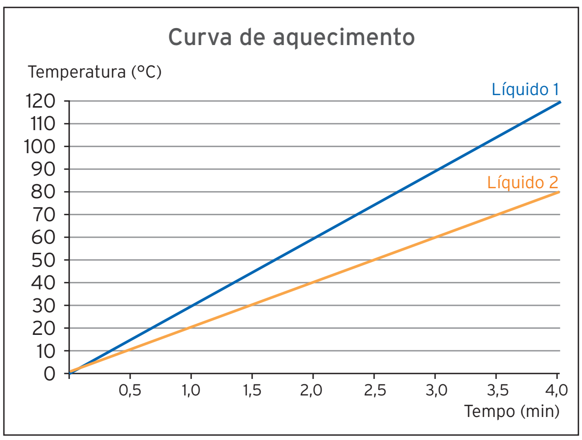
$$d(n) = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

a) Quantas diagonais tem um polígono convexo de 90 lados?

b) Qual é o número de lados de um polígono convexo que tem 170 diagonais?

c) Qual é o polígono cujo número de diagonais é o dobro do número de lados?

62. Dois líquidos foram aquecidos a partir de 0 °C. O aumento de temperatura em função do tempo foi representado no gráfico abaixo.



a) Qual líquido aquece mais rapidamente?

b) Após dois minutos do início de aquecimento, quais eram as temperaturas dos líquidos?

c) Qual era a temperatura do líquido 1, quando o líquido 2 estava a 60 °C?

63. Inácio quer encher uma piscina com capacidade para 54 000 litros. Para realizar essa tarefa, ele utilizará uma torneira com uma vazão (quantidade de água que sai da torneira) de 900 litros por hora. Copie e complete a tabela. Em seguida, responda às questões.

Horas	Vazão da torneira (litros)
1	
5	
10	
15	
20	
25	
30	

a) Quantas horas são necessárias para encher metade da piscina?

b) Em quantos dias a piscina estará cheia, se mantida essa vazão?

64. Pesquisa e tomada de decisão. Observe o boleto bancário que deverá ser pago em 10 de setembro de 2012 a uma empresa de venda de material de construção.

BANCO ZZZ	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento.	Vencimento 10/09/2012
Cedente Pisos e Tintas – Material de Construção Ltda.	(=) Valor do documento R$ 236,00
Instruções No caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 15,50 mais R$ 0,50 por dia de atraso.	(–) Descontos R$ 0,00 (+) Multa (=) Valor cobrado

Considere $V(x)$ o valor total a ser pago pelo boleto após o dia de vencimento, em que x é o número de dias de atraso no pagamento.

a) Quanto será pago pelo boleto, se este for quitado até a data de vencimento?

b) Qual é a expressão que define $V(x)$, após o vencimento?

c) Qual é a variável independente nessa função?

d) Quanto será pago no 5º dia após o vencimento?

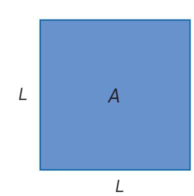
e) O boleto bancário é uma forma de pagamento muito utilizada no dia a dia. Cada grupo de 4 ou 5 alunos deve trazer um boleto bancário para a sala de aula e formular questões que possam ser respondidas a partir dos dados obtidos nesse boleto. Depois, deve resolver a atividade de outro grupo.

65. Do alto de uma torre, um objeto parte do repouso em queda livre segundo a lei $h(t) = 5 \cdot t^2$, em que h é a altura em metros e t o tempo em segundos. Sabendo que a altura da torre é de 45 metros, determine qual o tempo de duração da queda livre desse objeto.

66. A área de um quadrado depende da medida de seu lado.

a) Copie a tabela abaixo em seu caderno e complete-a.

Lado (cm)	Área (cm²)
1	1
2	4
3	
	16
4,5	
	36
8,2	



b) Escreva uma fórmula que expresse a área do quadrado em função da medida do lado.

67. Um paciente paga R$ 150,00 por dia de internação em um quarto de hospital e R$ 4150,00 por uma cirurgia.

a) Qual é o valor total pago por um paciente submetido a essa cirurgia e que ficou internado por 4 dias nesse hospital?

b) Expresse o total pago (y) por uma cirurgia em função do número de dias de internação (x) de um paciente.

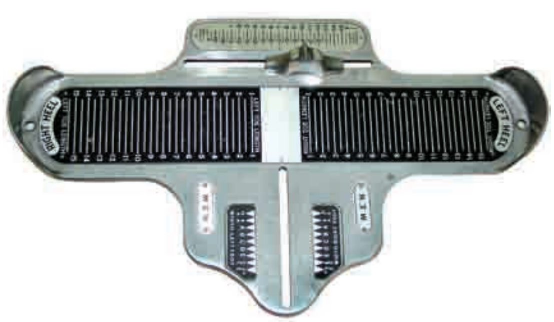
68. Uma garota arremessa uma peteca verticalmente para cima. A altura da peteca pode ser expressa em função do tempo pela lei: $h(t) = 60t - 5t^2$, em que o tempo é medido em segundos e a altura em metros. Quanto tempo a peteca leva para voltar até a mão da garota?

69. Investigação e validação. Em 1305 o rei Eduardo, da Inglaterra, padronizou a numeração dos sapatos e, desde então, essa escala é utilizada em muitos lugares no mundo todo.

As indústrias de calçados, juntamente com pesquisadores matemáticos, desenvolveram uma função que relaciona o comprimento do pé de uma pessoa com o número do calçado que ela utiliza.

$$N = 5P + \frac{28}{4}$$

Sendo N o número do calçado e P o comprimento, em centímetros, do pé, desenvolva e discuta as questões com dois colegas.



Instrumento para medir o comprimento do pé.

a) Com o auxílio de uma régua cada um deve medir seu pé direito e registrar o resultado, em centímetros.

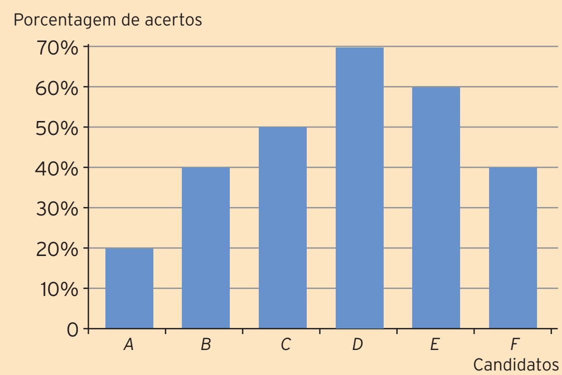
b) Observe como seus colegas realizam a medição: eles procedem da mesma maneira que você ou de um modo diferente?

c) Calcule o número do calçado que cada um usaria, considerando a fórmula dada. Depois compare com o valor real, ou seja, o número do sapato que cada um está usando.

d) Analisando os valores obtidos, você diria que o número do sapato está relacionado com o comprimento do pé? E se um dos valores aumenta, o que acontece com o outro valor?

Expressão e linguagem matemática

(OBM) O gráfico [...] [abaixo] mostra o percentual de acertos numa prova de 60 testes de seis candidatos finalistas de um concurso. Qual foi o número médio de questões erradas por esses candidatos nessa prova?



1. Escreva

Anote sua resolução em uma folha de papel à parte. Procure explicitar cada etapa da resolução com detalhes. Se possível, justifique cada passagem.

2. Converse

Compare sua resolução com a de um colega que tenha resolvido a questão de modo diferente do seu.

- As operações utilizadas foram as mesmas?
- A ordem em que foram aplicadas são as mesmas?
- Os conceitos utilizados foram os mesmos? Caso contrário, explicite os conceitos que seu colega utilizou.

Avalie com um colega as diferenças e semelhanças no modo pelo qual cada um de vocês pensou e registre a conclusão a que chegou.

3. Exponha

Afixe em um mural, lado a lado, a sua resolução e a de seu colega, juntamente com o registro da conclusão.

A nova classe média do Brasil

Como vivem esses 100 milhões de brasileiros e o que eles representam para o futuro do país

[Muitas famílias brasileiras passaram a integrar a classe média] [...], segundo uma pesquisa divulgada na semana passada pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), do Rio. De acordo com esse estudo, nos últimos seis anos cerca de 20 milhões de brasileiros deslocaram-se da base para o miolo da pirâmide social. Até há pouco tempo classificados como pobres ou muito pobres, eles melhoraram de vida e [...] começam a usufruir vários confortos típicos de classe média. Sua ascensão social revela uma excelente novidade: pela primeira vez na História, a classe média passa a ser maioria no Brasil. São hoje 52% da população (eram 44% em 2002) – ou 100 milhões de brasileiros, segundo a FGV. [...]

Em sua pesquisa, a FGV definiu como classe média as famílias com renda mensal entre R$ 1 065 e R$ 4 591.

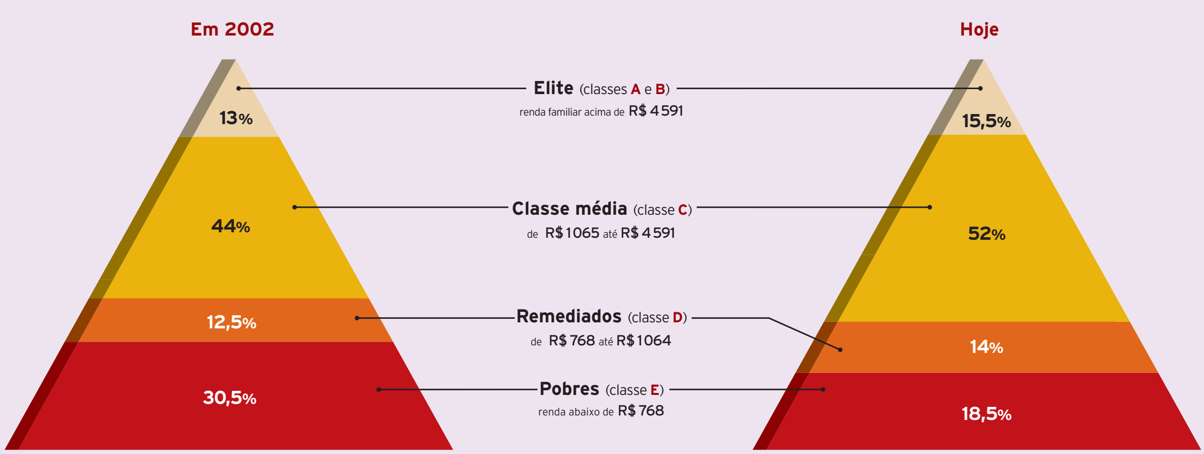
Esse universo de 100 milhões de brasileiros é formado sobretudo pelos ex-pobres que acabam de pôr o pé na classe média. Alguns estudiosos chamam esse segmento de classe média baixa, outros falam em classe C. Para muitos, é difícil classificá-los. O certo é que melhoraram de vida. Anos atrás, não tinham conta em banco, consumiam apenas o essencial e seu principal objetivo na vida era chegar ao fim do mês com as contas pagas. Hoje, estão comprando o primeiro carro zero, construindo um cômodo a mais na casa, se vestem melhor. [...]

Entre os brasileiros que ascenderam à nova classe média, mais da metade estudou menos de três anos. Isso significa que eles não terminaram a 4ª série do ensino fundamental. [...] Embora tenham conquistado uma renda maior, essa faixa corre o risco de perder espaço no mercado pela crescente exigência por qualificação profissional. [...]

Segundo o Ministério do Trabalho, os trabalhadores que mais perdem espaço no mercado são os que não completaram a 4ª série. Entre 2005 e 2006, o saldo entre admitidos e desligados com essa escolaridade foi negativo: menos 120 mil vagas. Com o avanço da tecnologia, a tendência é que se alargue a distância entre a demanda por mão de obra qualificada e a oferta de trabalhadores sem estudo.

A supremacia da classe C

Segundo a FGV, a pobreza despencou desde 2002. Com isso o miolo da pirâmide engordou e agora é maioria absoluta



David Friedlander, Ivan Martins e Peter Moon, com Martha Mendonça e Ricardo Mendonça.
Revista Época, n. 542, 11 out. 2008.

Sobre o texto

1. Cite alguns confortos que caracterizam a inserção de uma pessoa na classe média.
2. Segundo o texto, grande parte das pessoas que ingressaram na classe média continuará tendo uma melhoria nas condições de vida? Justifique sua resposta.
3. Você considera adequado o critério utilizado na pesquisa? Justifique. Que outros critérios poderiam ter sido utilizados? Os resultados da pesquisa seriam diferentes com outros critérios?

Roteiro de estudos

Função

- **Função f:** Dados dois conjuntos A e B, não vazios, a função f é uma regra de correspondência ou lei de correspondência que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.
- **Domínio e contradomínio:** Dada uma função f de A em B, o conjunto A é denominado domínio da função f e o conjunto B, contradomínio dessa função. O domínio é denotado por $D(f)$ ou D e o contradomínio, por $CD(f)$ ou CD.
- **Imagem de uma função:** A imagem $f(x)$ da função é o valor correspondente $y \in D$ assumido pela função f para cada $x \in D$.

> Retome os conteúdos com os exercícios propostos do 12 ao 25 e com os exercícios complementares 43, 46, 48, 49, 51 e 52.
> Resolva os exercícios 3 e 15 de Vestibular e Enem.

Desafio 1 Há uma relação utilizada por profissionais da saúde que se chama "relação cintura-quadril". É considerada uma das melhores maneiras de avaliar o risco de ataque cardíaco associado à obesidade. O índice é considerado normal quando:

homem	$\dfrac{\text{cintura (cm)}}{\text{quadril (cm)}} = 0{,}90$
mulher	$\dfrac{\text{cintura (cm)}}{\text{quadril (cm)}} = 0{,}80$

Quanto mais baixo o índice, melhor.

Defina duas funções – uma para *homem* e outra para *mulher* – que relacionem as medidas da cintura e do quadril com o índice.

Desafio 2 A função f é dada pela tabela a seguir.

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	1	2

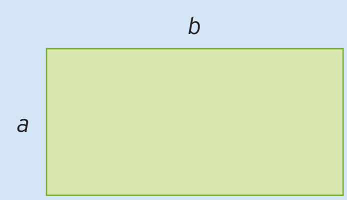
Calcule o valor de $\underbrace{f(f(...(f(f\ (3)))...))}_{640 \text{ vezes}}$.

Função e gráfico

- **Plano cartesiano:** é um sistema formado por um plano contendo duas retas reais perpendiculares entre si, que se cruzam no ponto O, denominado origem do sistema de coordenadas.
- **Representações das funções:** as funções podem ser representadas graficamente por meio de tabelas, diagramas ou esquemas, ou no plano cartesiano.
- **Gráfico de uma função:** é o conjunto de pares ordenados (x, y), que tenham x pertencente ao domínio da função e $y = f(x)$.

> Retome os conteúdos com os exercícios propostos do 30 ao 33 e com o exercício complementar 53.
> Resolva os exercícios 5, 7, 8, 13, 19 e 20 de Vestibular e Enem.

Desafio 3 Um retângulo cujos lados medem a e b, com $a, b \in \mathbb{R}_+$, tem perímetro 40.



a) Determine a lei de correspondência que dá o valor de a em função de b.
b) Determine o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função.
c) Represente o gráfico dessa função.
d) Determine os valores de a e b para que o retângulo seja um quadrado.

Função e proporcionalidade

- **Proporcionalidade direta:** duas grandezas, x e y, são diretamente proporcionais quando satisfazem duas condições:
  a) O valor de x aumenta e o correspondente valor de y também aumenta ou vice-versa.
  b) A relação $\dfrac{x}{y} = k$, com k constante e positivo.
- **Proporcionalidade inversa:** duas grandezas, x e y, são inversamente proporcionais quando satisfazem duas condições:
  a) Os valores de x aumentam quando os de y diminuem, e vice-versa.
  b) O produto $x \cdot y = k$, com k constante e positivo.

> Retome os conteúdos com os exercícios propostos do 37 ao 41 e com os exercícios complementares do 54 ao 56.
> Resolva o exercício 2 de Vestibular e Enem.

Desafio 4 (OBM) Entre 1986 e 1989, época em que vocês ainda não tinham nascido, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é:

1 real = 2 750 000 000 cruzados

Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse de receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

a) 26,4 km
b) 264 km
c) 26 400 km
d) 264 000 km
e) 2 640 000 km