Relações trigonométricas em triângulos quaisquer

Prof. Msc. Wagner Santiago de Souza

Apresentação

- Já vimos como encontrar e como utilizar as razões trigonométricas em triângulos retângulos. Nesta quinzena, utilizaremos as razões trigonométricas em triângulos quaisquer, mais especificamente usaremos duas leis, a lei dos senos e a lei dos cossenos.

Seno e cosseno de ângulos obtusos

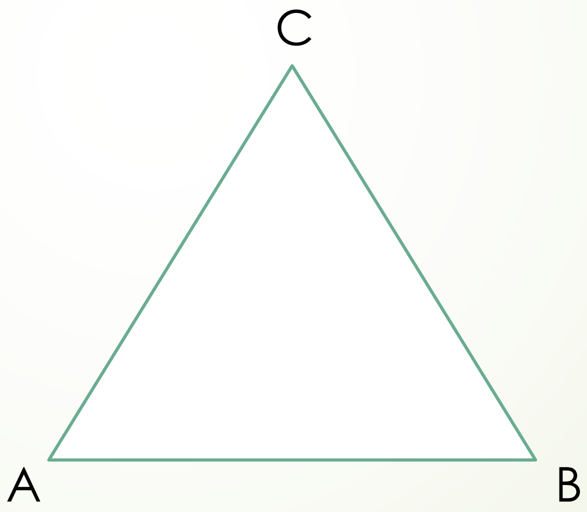
- Dado um ângulo α, com $90° < \alpha < 180°$, temos:
- $sen(\alpha) = sen(180° - \alpha)$
- $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$

- Exemplos:
- $sen120° = sen(180° - 120°) = sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $cos135° = -\cos(180° - 135°) = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soma dos ângulos internos de um triângulo

- Em qualquer triângulo ABC, vale a relação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$



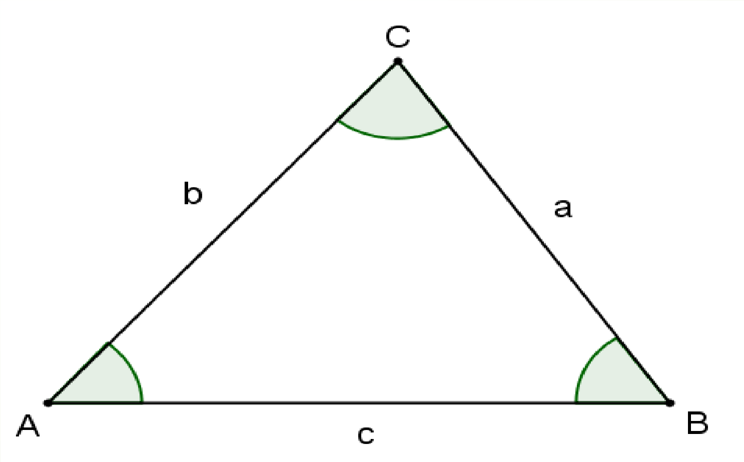
Lei dos Senos

- A lei dos senos é um resultado muito importante no estudo da geometria e da trigonometria, pois nos permite encontrar as medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer, relacionando dois lados e seus respectivos ângulos opostos. A mesma garante que, em qualquer triângulo a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, ou seja, é a mesma independentemente do lado escolhido.

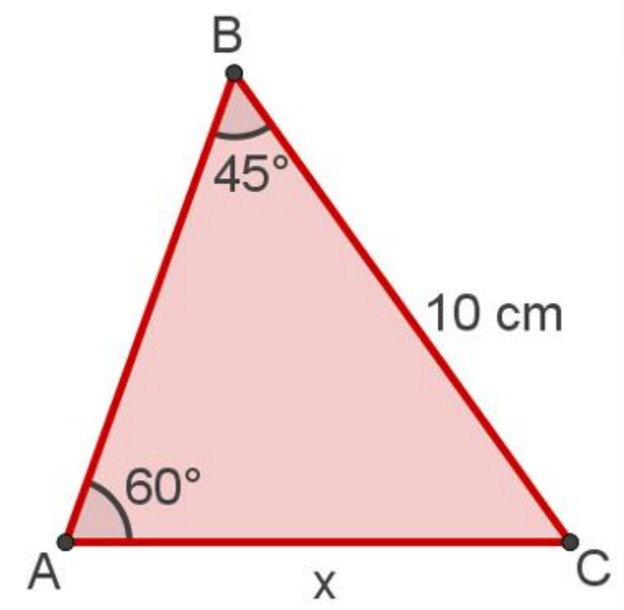
Enunciado da Lei dos senos

- ***Lei dos senos.*** Dado um triângulo *ABC*, com *AB* = c, *AC* = *b* e *BC* = *a*, como o da Figura abaixo, sempre é válida a relação

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}}\,.$$



Exemplo 1: No triângulo a seguir, determine a medida do lado AC, tendo em vista as medidas presentes nele.



- Solução:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{10}{sen60°}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}x}{\cancel{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

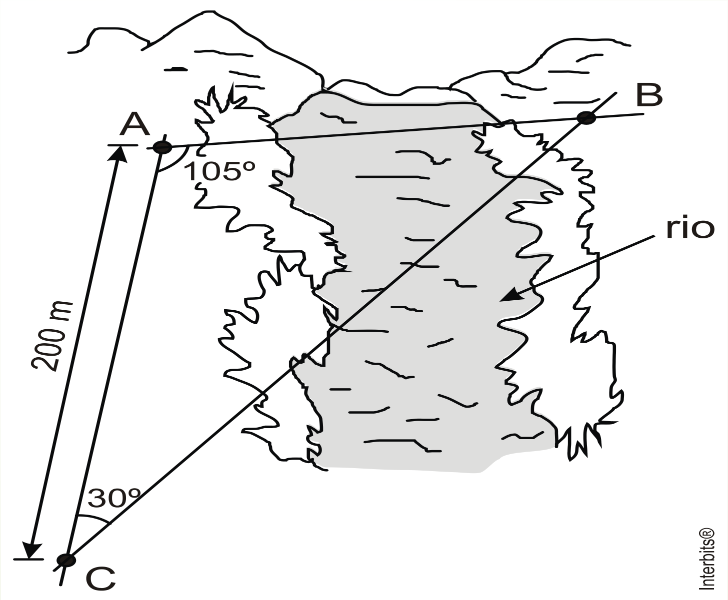
$$\sqrt{3}x = 10\sqrt{2}$$

$$x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} (Racionalização)$$

$$x = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

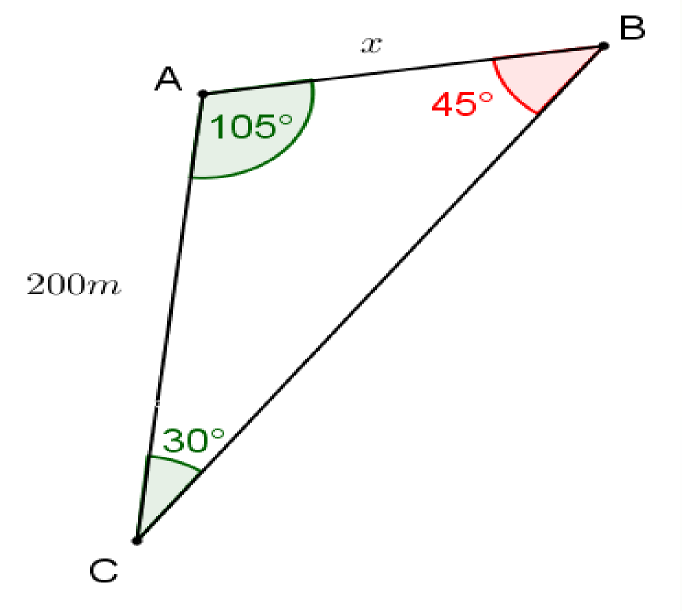
Exemplo 2

- A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{A}$ mediam, respectivamente, 30º e 105º, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, Qual é a distância, em metros, do ponto A ao ponto B?

- Solução: Observe a figura



- Nesta figura temos uma ilustração da situação citada no Exemplo 1. Nosso objetivo é encontrar o valor do lado *AB*, ou seja, o valor de x. Para isso inicialmente notamos que $\hat{B}$ = 45°, pois

$$105° + 30° + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 45°.$$

- Daí, aplicando a lei dos senos no triângulo *ABC*, temos que

$$\frac{x}{sen\,30°} = \frac{200}{sen\,45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x \times \frac{2}{1} = 200 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{200}{\sqrt{2}},$$

racionalizando esta fração, obtemos

$$x = \frac{200}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{200\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 100\sqrt{2}.$$

Lei dos Cossenos

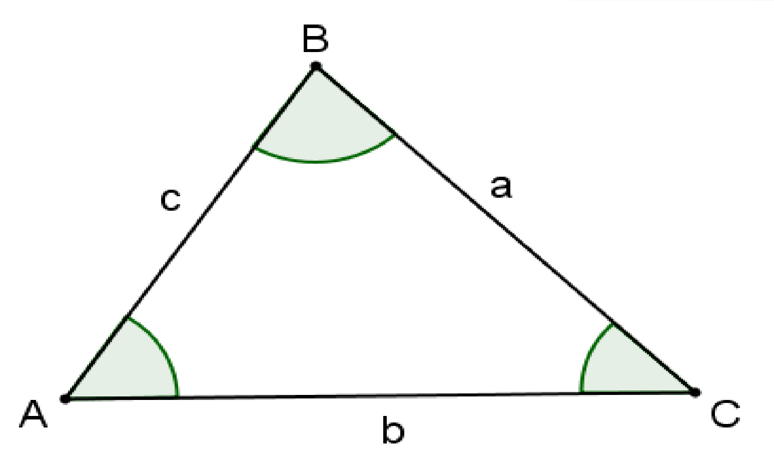
Assim como a lei dos senos, a lei dos cossenos é um resultado muito importante para a geometria e para trigonometria, pois a mesma também traz subsídios para encontrar medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer. De acordo com Souza (2013) a relação que hoje conhecemos como lei dos cossenos pode ser encontrada em uma das obras mais importantes da história da geometria, pois a mesma está presente no livro II da obra Os Elementos, de Euclides.

Enquanto a lei dos senos relaciona dois lados e seus respectivos ângulos opostos, a lei dos cossenos relaciona os três lados e um ângulo do triângulo. A mesma afirma que em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

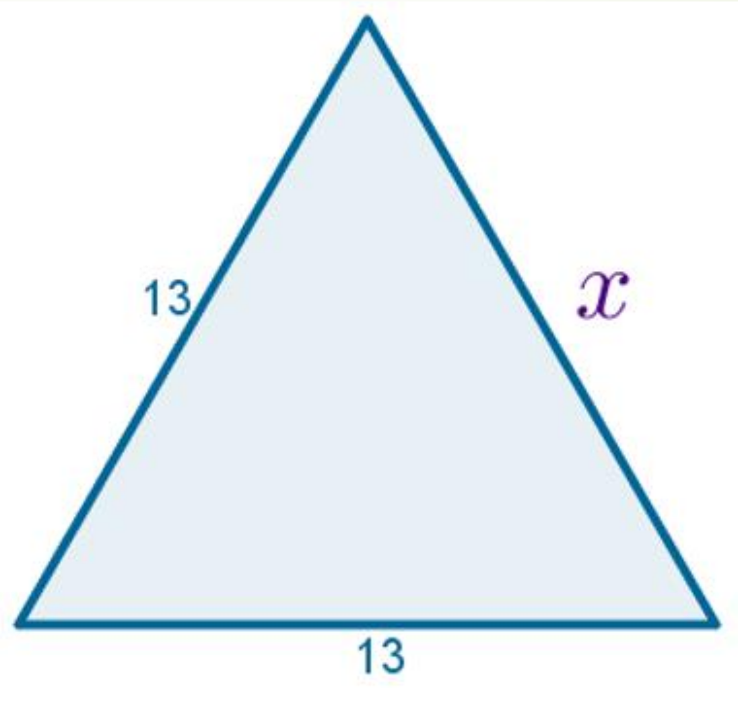
Enunciado da lei dos cossenos

- ***Lei dos cossenos.*** Dado um triângulo *ABC*, com *AB* = c, *AC* = *b* e *BC* = *a*, como o da Figura abaixo, são sempre válidas as seguintes relações

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}\,;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}\,;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}\,.$$



Exemplo 3: Calcule a medida do lado x do triângulo abaixo sabendo que o ângulo oposto a ele mede 60°.



- Solução:

$$x^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot cos60°$$

$$x^2 = 169 + 169 - 338 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 338 - 169$$

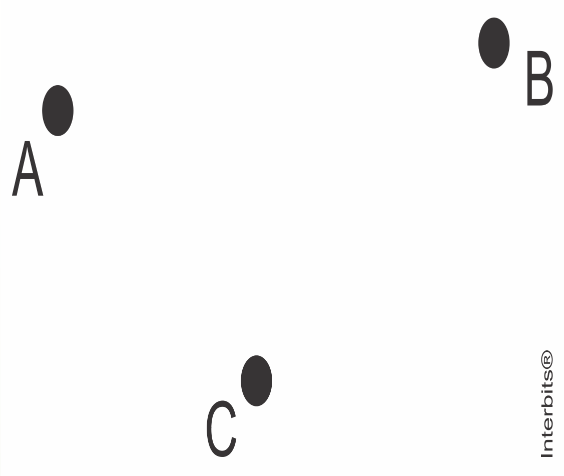
$$x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169}$$

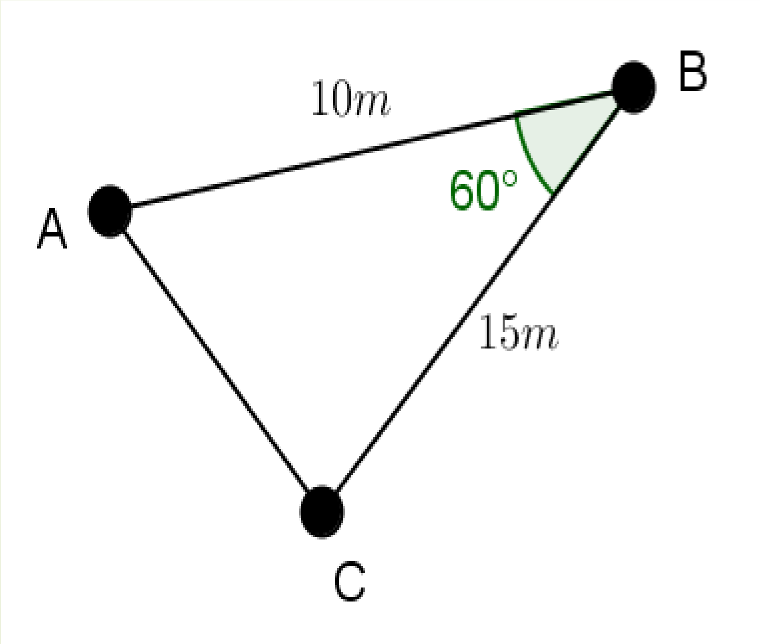
$$x = 13.$$

Exemplo 4

- (IFSUL 2015) Em certa cidade, a igreja está localiza no ponto A a prefeitura no ponto B e a livraria no ponto C como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, qual a distância da livraria à igreja?



- Solução: Observe a figura



- A situação descrita no Exemplo 4 está representada na Figura ao lado, na qual a distância procurada é a medida do lado *AC*, encontraremos essa medida, aplicando a lei dos cossenos no triângulo *ABC* da Figura, faremos isso como segue:

- $AC^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \times 10 \times 15 \times \cos 60°$

$$AC^2 = 100 + 225 - 300 \times \frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 325 - 150$$

$$AC^2 = 175$$

$$AC = \sqrt{175}$$

$$AC = 5\sqrt{7}.$$

Logo a distância da livraria à igreja é de $5\sqrt{7}$ m.